Optimisation d'une contre-réaction électromagnétique pour la récupération d'énergie vibratoire

DIDIER MAMMOSSER^a, EMMANUEL FOLTÊTE ET MANUEL COLLET

Institut FEMTO-ST, Département de Mécanique Appliquée, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté,
24 rue de l'Épitaphe, 25000 Besançon, France

Reçu le 8 décembre 2006, accepté le 11 octobre 2007

Résumé – La problématique de récupération d'énergie vibratoire est de plus en plus d'actualité. Cette étude fournit des éléments nécessaires à l'optimisation d'une contre-réaction électromagnétique pour la conversion d'énergie vibratoire en énergie électrique. La structure étudiée est une poutre encastrée-libre excitée autour du premier mode de flexion. Un convertisseur, de type électromagnétique sans contact, est placé dans une boucle de rétroaction passive. Pour étudier l'influence des différents types de rétroaction sur les énergies fournies et dissipées, un modèle numérique a été développé, ainsi qu'un modèle analytique simple, créé à partir du caractère mono-dimensionnel du problème. Dans le cas d'un circuit purement résistif, l'étude des énergies disponible et dissipée conduit à l'identification de trois points de fonctionnement intéressants : d'une part celui qui maximise la conversion d'énergie, d'autre part deux points conduisant à des énergies prélevées maximales pour une force d'excitation donnée. Comme ces points sont distincts, les problématiques de récupération d'énergie et d'amortissement sont donc différentes. Ces résultats analytiques et numériques sont confirmés par l'étude expérimentale.

Mots clés : Récupération d'énergie / amortissement / structure vibrante / rétroaction / transducteur électromagnétique

Abstract – **Optimisation of electromagnetic feedback for vibrating energy harvesting.** Energy harvesting is a more and more studied topic. This paper provides some necessary elements to optimise the energy conversion from mechanical vibration to electrical power with an electromagnetic feedback. A cantilever beam is studied around its first bending mode. A contactless electromagnetic transducer is used in a passive feedback loop. To study the influence of different types of feedback on the provided and scavenged energies, a numerical model was built, and as the problem is monodimensional a simple analytic model was developed. In the case of a purely resistive feedback, the study of the provided and harvested energies shows three interesting points: two points where the harvested energy is maximal, and one point which maximises the energy conversion efficiency. As these points are distinct, the harvesting and damping strategies are different. These analytical and numerical results are confirmed by the experimental measurements.

Key words: Energy harvesting / damping / vibrating structure / feedback / electromagnetic transducer

1 Introduction

De nombreuses recherches sont actuellement menées sur la problématique de la récupération d'énergie [1]. L'objectif à terme est de stocker une énergie disponible localement pour pouvoir par exemple alimenter des capteurs de surveillance ou des systèmes de contrôle

embarqués [2], cette perspective étant réaliste étant donné la baisse de consommation de ces systèmes électroniques. La plupart des convertisseurs utilisent des matériaux piézoélectriques [3–5], beaucoup moins sont basés sur une transformation électromagnétique [6, 7]. La récupération d'énergie a pour conséquence d'amortir la structure [8], ce qui amène la question suivante : faut-il maximiser l'amortissement de la structure pour récupérer le maximum d'énergie ?

^a Auteur pour correspondance :
didier_mammosser@wanadoo.fr

Nomenclature

a_{11}, a_{12}, a_{22} : grandeurs proportionnelles à l'inverse de la masse généralisée du premier mode de la poutre en flexion (kg^{-1})
b_1, b_2 : vecteur d'influence au point 1 et au point 2
C : matrice amortissement de la structure
C_e : coefficient de couplage électromagnétique (N.A^{-1})
P_1, P_2 : puissance moyenne dans les bobines 1 et 2 (W)
P_n : puissance nominale (W)
F : vecteur force
F_1, F_2 : forces appliquées par les bobines 1 et 2 (N)
F_{em} : force électromotrice (V)
G : fonction de transfert de la boucle de rétroaction
H : matrice de transfert X/F
h_{ij} : fonction de transfert x_i/F_j
H_1, H_2 : fonction de transfert du système en boucle fermée
i_1, i_2 : intensité circulant dans les bobines 1 et 2 (A)
K : matrice raideur de la poutre
$k_{11}^0, k_{12}^0, k_{22}^0$: résidu statique (m.N^{-1})
L : longueur de la poutre (m)
L_b : inductance de la bobine (H)
M : matrice masse de la poutre
Q : vecteur déplacement généralisé
R_b : résistance de la bobine (Ω)
r : rapport entre la pulsation d'excitation (ω) et la pulsation propre de la poutre (ω_1) ($r = \omega/\omega_1$)
s : variable de Laplace
$\bar{v}_1, \bar{v}_2$: conjugué de la valeur complexe des vitesses aux points 1 et 2
V_2 : tension aux bornes de la bobine 2 (V)
X : vecteur déplacement (m)
x_1, x_2 : déplacement axial des bobines 1 et 2 (m)
Z : impédance totale ($Z = R_b + Z_f$) purement résistive de la boucle créée sur la bobine 2 (Ω)
Z_f : impédance branchée sur la bobine 2 (Ω)
Z_{opt} : impédance Z qui maximise la puissance P_2 au point de fonctionnement B (Ω)
α : coefficient qui caractérise le déphasage entre l'inductance L_b et la résistance Z
η : rendement énergétique P_2/P_1
μ_i : masse généralisée du mode i
ξ_e : amortissement électrique
ξ_i : amortissement réduit du mode i
ρ : masse volumique (kg.m^{-3})
Φ : matrice modale
Φ_i : $i^{\text{ème}}$ vecteur propre
ω : pulsation d'excitation (rad.s^{-1})
ω_i : pulsation propre du mode i (rad.s^{-1})
ω_1 : pulsation propre du mode 1 de la poutre en flexion (point A) (rad.s^{-1})
ω_E : pulsation propre du mode 1 de la poutre en boucle fermée $Z = 0$ (point E) (rad.s^{-1})

Cette étude apporte des éléments de réponse dans un contexte expérimental volontairement simple dans le but de disposer d'une modélisation analytique :

- la structure étudiée est une poutre encastrée-libre et on ne s'intéresse qu'à son premier mode de flexion ;
- le convertisseur utilisé est de type électromagnétique sans contact, avec une bobine mobile fixée sur la structure et un aimant permanent solidaire du bâti. Cette solution alternative aux systèmes piézoélectriques présente un comportement plus simple à caractériser et à modéliser, le couplage mécanique étant uniquement lié à la contre-réaction appliquée par la bobine ;
- ce convertisseur est placé dans une boucle de rétroaction passive [9] de type RLC simulant un dispositif de récupération d'énergie ;

- un système électromagnétique identique au précédent est utilisé pour exciter la structure.

Un soin particulier est apporté à la modélisation multiphysique du cas étudié. Le modèle éléments-finis condensé de la poutre est complété par les équations de couplage du convertisseur ainsi que par celles du circuit de rétroaction. Il permet alors d'étudier l'effet de différents types de rétroactions et des paramètres associés sur les énergies mises en jeu.

Le caractère mono-dimensionnel du problème permet en outre des développements analytiques. Dans le cas d'un circuit de rétroaction purement résistif, les écritures des puissances moyennes disponibles permettent notamment d'optimiser les énergies mises en jeu.

Fig. 1. Dispositif expérimental.

Fig. 2. Schéma du dispositif expérimental.

2 Dispositif expérimental

2.1 Structure

La structure étudiée est une poutre encastée-libre sur laquelle sont montés deux actionneurs électromagnétiques sans contact, l'un fournissant l'excitation extérieure, l'autre étant connecté à une boucle de rétroaction (Fig. 1). La poutre est étudiée au voisinage de son premier mode de flexion de façon à pouvoir être modélisée simplement. Elle est en acier, de masse volumique $\rho = 7850 \text{ kg.m}^{-3}$, de longueur libre $L = 525 \text{ mm}$, de largeur 50 mm et d'épaisseur $h = 9,6 \text{ mm}$.

2.2 Actionneurs

Les points 1 et 2 sont respectivement situés à une distance $L_1 = 155 \text{ mm}$ et $L_2 = 335 \text{ mm}$ de l'encastement (Fig. 2). Chacun de ces points est instrumenté à l'aide d'un actionneur électromagnétique sans contact constitué d'une bobine fixée sur la structure par un cône en aluminium et placée dans l'entrefer d'un aimant permanent lié au bâti. Les caractéristiques des bobines sont les suivantes : résistance $R_b = 0,70 \Omega$, inductance $L_b = 0,070 \text{ mH}$, la masse de la bobine et du cône est de $14,3 \text{ g}$. Lorsqu'elles subissent un déplacement axial x de faible amplitude, leur comportement est régi par les équations suivantes :

$$F = -C_e i \quad F_{em} = C_e \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

où F est l'effort induit par le couplage électromagnétique, i le courant qui circule dans la bobine et F_{em} la force

Tableau 1. Données expérimentales et numériques pour la poutre seule.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Fréquence propre expérimentale (Hz)	28,09	174,2	478,7	942
Amortissement modal expérimental (%)	0,205	0,195	0,098	0,158
Fréquence propre numérique (Hz)	28,11	174,1	477,6	970,6

électromotrice induite. Le coefficient de couplage C_e est lié au champ magnétique et au nombre de spires qui y sont soumises. Son identification expérimentale a conduit à la valeur $C_e = 2,1 \text{ N.A}^{-1}$.

2.3 Instrumentation

Une cellule de force intercalée entre chaque bobine et la structure permet de mesurer l'effort appliqué par chaque actionneur. Les réponses aux mêmes points sont mesurées grâce à des accéléromètres situés sur la face arrière de la poutre. La bobine située au point 2 est connectée à une boucle passive d'impédance Z_f simulant le dispositif de récupération d'énergie. La tension à ses bornes V_2 est mesurée de façon conventionnelle, le courant i_2 qui la parcourt est quant à lui mesuré par une sonde de courant à effet Hall avec une précision de l'ordre du mA.

3 Modélisation

3.1 Modélisation de la poutre seule

La poutre encastée-libre est discrétisée par des éléments-finis de type poutre d'Euler-Bernoulli. Les accéléromètres, les cellules de force et les bobines sont modélisés par des masses ponctuelles aux points 1 et 2. Une analyse modale expérimentale de la poutre seule a permis de déterminer les fréquences propres et amortissements modaux des premiers modes de flexion. Le module d'Young introduit dans le modèle numérique a ensuite été choisi de façon à obtenir la meilleure corrélation entre les fréquences propres mesurées et calculées, comme le montrent les données du tableau 1.

L'équilibre de la poutre discrétisée peut s'écrire :

$$M \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} + C \frac{d\mathbf{X}}{dt} + K \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2)$$

où M , C , K sont respectivement les matrices masse, amortissement et raideur, $\mathbf{X}$ est le vecteur déplacement et $\mathbf{F}$ le vecteur des forces extérieures. En notant Φ la matrice modale du système conservatif et $\mathbf{Q}$ le vecteur des coordonnées généralisées, il vient :

$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{Q} \Rightarrow \Phi^T M \Phi \frac{d^2 \mathbf{Q}}{dt^2} + \Phi^T C \Phi \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \Phi^T K \Phi \mathbf{Q} = \Phi^T \mathbf{F} \quad (3)$$

Fig. 3. FRF h_{11} , poutre seule : simulée avec 6 modes (•), simulées avec 1 mode (o), expérimentale (+).

La structure étant peu amortie et les modes considérés bien séparés en fréquence, l'hypothèse d'amortissement modal est supposée vérifiée, i.e. la base modale diagonalise la matrice amortissement. On a alors après transformée de Laplace :

$$\Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\xi_i \omega_i) \Rightarrow \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^T \Phi_i}{\mu_i(s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2)} \mathbf{F} = \mathbf{H}(s) \mathbf{F} \quad (4)$$

où μ_i , ξ_i et ω_i sont respectivement la masse modale, l'amortissement modal et la pulsation propre associés au mode i , n est le nombre de degrés de liberté du système discret. Au voisinage du premier mode, l'expression de la matrice de transfert $\mathbf{H}(s)$ peut être approchée par :

$$\mathbf{H}(s) \approx \frac{\Phi_1^T \Phi_1}{\mu_1(s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2)} + \left(K^{-1} - \frac{\Phi_1^T \Phi_1}{\mu_1 \omega_1^2} \right) \quad (5)$$

Considérons enfin b_1 et b_2 les vecteurs d'influence tels que $x_1 = b_1^T \mathbf{X}$ et $x_2 = b_2^T \mathbf{X}$, alors :

$$\begin{cases} x_1 = h_{11}F_1 + h_{12}F_2 \\ x_2 = h_{21}F_1 + h_{22}F_2 \end{cases} \quad (6)$$

avec :

$$\begin{cases} h_{11} = \frac{b_1^T \Phi_1^T \Phi_1 b_1}{\mu_1(s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2)} + \sum_{i=2}^n \frac{b_1^T \Phi_i^T \Phi_i b_1}{\mu_i \omega_i^2} \\ \quad = \frac{a_{11}}{s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2} + k_{11}^0 \\ h_{12} = \frac{b_1^T \Phi_1^T \Phi_1 b_2}{\mu_1(s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2)} + \sum_{i=2}^n \frac{b_1^T \Phi_i^T \Phi_i b_2}{\mu_i \omega_i^2} \\ \quad = \frac{a_{12}}{s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2} + k_{12}^0 \\ h_{21} = h_{12} \\ h_{22} = \frac{b_2^T \Phi_1^T \Phi_1 b_2}{\mu_1(s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2)} + \sum_{i=2}^n \frac{b_2^T \Phi_i^T \Phi_i b_2}{\mu_i \omega_i^2} \\ \quad = \frac{a_{22}}{s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2} + k_{22}^0 \end{cases} \quad (7)$$

où k_{11}^0 , k_{12}^0 , k_{22}^0 sont les résidus statiques représentant les modes supérieurs.

On a représenté sur la figure 3 les Fonctions de Réponse Fréquentielle (FRF) h_{11} ($h_{11} = x_1/F_1$) la première mesurée expérimentalement, les deux autres simulées en faisant une troncature modale au-delà du sixième mode de flexion et au-delà du premier mode.

Tableau 2. Différences relatives moyennes entre les FRF calculées avec 1 mode et les FRF calculées avec 6 modes.

Bande fréquentielle	$h_{11} = \frac{x_1}{F_1}$	$h_{21} = \frac{x_2}{F_1}$	$h_{22} = \frac{x_2}{F_2}$
0–40 Hz	4,90 %	0,57 %	0,14 %
25–30 Hz	0,19 %	0,04 %	0,02 %

Fig. 4. Modélisation du système bouclé.

Fig. 5. Schéma électrique de la contre-réaction.

On note que la superposition des données mesurées et simulées est satisfaisante au voisinage du premier mode, et que la troncature modale a un effet très limité dans la bande fréquentielle considérée. Cette dernière remarque est confirmée par les données du tableau 2, qui présente pour deux bandes fréquentielles la différence relative moyenne entre les FRF calculées à partir du premier mode uniquement et les FRF calculées en utilisant les six premiers modes de flexion.

3.2 Modélisation du système bouclé

La formulation proposée (7) est assimilable à un système LTI (Linear Time Invariant) à deux entrées et deux sorties. Le circuit électrique passif connecté à la bobine 2 peut se représenter par une transmittance $G(s)$ comme schématisé figure 4.

L'expression de la transmittance $G(s)$ est liée aux caractéristiques de la boucle de rétroaction dont le schéma électrique est représenté figure 5.

L'équilibre électrique se traduit par :

$$V_2 = -R_b i_2 - L_b \frac{di_2}{dt} + F_{em} = Z_f i_2 \quad (8)$$

d'où l'expression de la transmittance :

$$G(s) = -\frac{F_2}{x_2} = \frac{C_e^2 s}{Z_f + R_b + L_b s} \quad (9)$$

et des FRF du système bouclé :

$$\begin{cases} H_1 = \frac{x_1}{F_1} = h_{11} - G \frac{h_{12}^2}{1 + G h_{22}} \\ H_2 = \frac{x_2}{F_2} = \frac{h_{12}}{1 + G h_{22}} \end{cases} \quad (10)$$

Fig. 6. Évolution des puissances P_1 (a) et P_2 (b) en fonction de la fréquence d'excitation et de la résistance totale.

4 Étude énergétique

Pour simplifier la présentation des résultats, les études énergétiques sont présentées pour le cas où l'impédance de contre-réaction Z_f est purement résistive. On notera alors $Z = Z_f + R_b$ la résistance totale de la boucle de contre-réaction. L'impédance totale de la boucle incluant les caractéristiques de la bobine vaut donc $Z + j\omega L_b$.

4.1 Étude numérique

Les expressions (10) permettent de calculer les réponses x_1 et x_2 à une force extérieure harmonique sur la bobine 1. On peut alors en déduire les puissances moyennes P_1 et P_2 respectivement fournie à la structure par la bobine 1 et dissipée dans le circuit passif connecté à la bobine 2 :

$$P_1 = \frac{1}{2} \text{Re}(\overline{v_1} F_1) = \frac{1}{2} \text{Re}(\overline{s x_1} F_1)$$

$$= \frac{1}{2} \|F_1\|^2 \text{Re}(\overline{s H_1}) \quad (11)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \text{Re}(\overline{v_2} F_2) = \frac{1}{2} \text{Re}(\overline{s x_2} F_2)$$

$$= \frac{1}{2} \|F_1\|^2 \|H_2\|^2 \text{Re}(\overline{s G}) \quad (12)$$

On montre, figure 6, les évolutions des puissances moyennes P_1 et P_2 calculées pour une force de 1 N dont la fréquence varie entre 25 et 40 Hz, et pour une résistance totale Z variant entre 10^{-6} et $10^4 \Omega$.

Le lieu d'Evans (tracé de la position du pôle dans le plan complexe) du système bouclé obtenu en faisant varier la résistance totale Z est représenté figure 7a.

Il est également intéressant de tracer l'évolution des puissances moyennes maximales en fonction de la résistance totale Z (Fig. 7b). Pour chaque valeur de résistance Z on détermine le maximum de la puissance moyenne P_2 (pour une bande fréquentielle donnée à partir de la Fig. 6b), et on détermine la puissance P_1 pour la pulsation qui maximise la puissance P_2 (donné sur la Fig. 6a) pour l'impédance Z choisie.

Fig. 7. Lieu d'Evans du système bouclé (a); puissances moyennes maximales dans les bobines P_1 (+) et P_2 (•) en fonction de la résistance totale Z (b).

Ces courbes présentent des points caractéristiques particuliers :

- Les points A_1 et A_2 correspondent au système en boucle ouverte, la puissance moyenne P_2 est alors nulle.

Fig. 8. Modèle masse-ressort.

- Les points E₁ et E₂ correspondent au montage en boucle fermée avec une résistance totale nulle. Là encore, la puissance moyenne P_2 est nulle. En effet, le système bouclé est assimilable à une poutre dont le déplacement transversal est bloqué au niveau de la bobine 2.
- Le point C présente l'amortissement maximal et la conversion optimale de puissance car $P_2 = P_1$. Néanmoins, les deux puissances moyennes ont une valeur relativement faible.
- Les points B₁, B₂, D₁, D₂ correspondent à des maxima de puissance P_2 , donc à des situations particulièrement intéressantes dans un contexte de récupération d'énergie.

4.2 Étude analytique

En vue de justifier les résultats numériques précédents, le modèle à 2 entrées et 2 sorties est une fois de plus simplifié pour conduire à un modèle à un seul degré de liberté. En négligeant les résidus statiques ($k_{11}^0 = k_{12}^0 = k_{22}^0 = 0$), on a :

$$\begin{cases} h_{12} = \frac{a_{12}}{s^2 + 2\xi_1\omega_1 s + \omega_1^2} \\ h_{11} = \frac{a_{11}}{a_{12}} h_{12} \\ h_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} h_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} h_{12} \end{cases} \quad (13)$$

Cette formulation est assimilable à un simple système masse-ressort avec boucle de rétroaction représenté figure 8.

En utilisant la propriété $a_{12}^2 = a_{11} \times a_{22}$ obtenue à partir des définitions des a_{ij} (7), les expressions des puissances moyennes et du rendement de conversion deviennent :

$$\begin{aligned} P_1 = & \left\{ \frac{1}{2} \frac{a_{11}}{2\omega_1} \|F_1\|^2 \left\{ \xi_1 \left(1 + \left[\frac{L_b\omega}{Z} \right]^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{C_e^2 a_{12}}{\omega_1 Z} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right\} \right\} \\ & \times \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_1} \right) - \xi_1 \frac{L_b\omega}{Z} \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_1} \right) \frac{L_b\omega}{Z} + \xi_1 + \frac{1}{2} \frac{C_e^2 a_{12}}{\omega_1 Z} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right]^2 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P_2 = & \left\{ \frac{1}{2} \frac{a_{12}}{2\omega_1} \|F_1\|^2 \left(\frac{1}{2} \frac{C_e^2 a_{12}}{\omega_1 Z} \right) \right\} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_1} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \xi_1 \frac{L_b\omega}{Z} \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_1} \right) \frac{L_b\omega}{Z} + \xi_1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{C_e^2 a_{12}}{\omega_1 Z} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right]^2 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\xi_1 \left[1 + \left(\frac{L_b\omega}{Z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{C_e^2 a_{12}}{\omega_1 Z}}{\xi_1 \left[1 + \left(\frac{L_b\omega}{Z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{C_e^2 a_{12}}{\omega_1 Z}} \quad (16)$$

Définissons les paramètres adimensionnels suivants :

$$\begin{cases} r = \frac{\omega}{\omega_1} \\ \alpha = \frac{L_b\omega}{Z} \\ \xi_e = \frac{1}{2} \frac{C_e^2 a_{12}}{\omega_1 Z} \end{cases} \quad (17)$$

où α caractérise le déphasage entre la résistance Z et l'inductance L_b , et ξ_e représente l'amortissement électrique créé par la résistance Z . En posant la puissance nominale $P_n = a_{12} \frac{\|F_1\|^2}{2\omega_1}$, on peut donc simplifier les expressions (14) à (16) par :

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{a_{11}}{a_{12}} P_n \frac{\xi_1 (1 + \alpha^2) + \xi_e \frac{a_{12}}{a_{11}}}{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right) - \alpha \xi_1 \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{1}{r} - r \right) + \xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_e \right]^2} \quad (18)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} P_n \frac{\xi_e}{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right) - \alpha \xi_1 \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \alpha \left(\frac{1}{r} - r \right) + \xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_e \right]^2} \quad (19)$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\xi_e}{\xi_1 (1 + \alpha^2) + \xi_e} \quad (20)$$

Ces expressions permettent de caractériser les points particuliers repérés figures 7a et b. Notons ω_E la pulsation de résonance de la poutre avec bobine 2 shuntée ($Z = 0\Omega$) (points E₁ et E₂). En cherchant la résistance Z qui optimise l'expression (15) de P_2 , on arrive à :

$$Z_{\text{opt}} = \frac{C_e^2 a_{22}}{2\xi_1 \omega_1} \quad (21)$$

La valeur optimale de la résistance Z au point B (Fig. 7) est notée Z_{opt} . L'expression (21) est obtenue en supposant $Z \gg L_b \omega$.

La dérivation des expressions des puissances moyennes par rapport aux paramètres Z et L_b permet d'obtenir les expressions analytiques approchées du pôle du système bouclé pour ces points caractéristiques, regroupées dans le tableau 3.

4.3 Étude expérimentale

Les puissances mécaniques moyennes expérimentales P_1 et P_2 sont à évaluer afin d'être comparées aux simulations numériques et aux formules analytiques. Pour

Tableau 3. Caractéristiques des points de fonctionnement particuliers.

Point	Partie réelle du pôle	Partie imaginaire du pôle	Rendement énergétique
A	$-\xi_1 \omega_1$	ω_1	0
B	$-2\xi_1 \omega_1$	ω_1	$\frac{1}{2}$
C	$-\frac{\omega_1 + \omega_E}{6} + \sqrt{\left(\frac{\omega_1 + \omega_E}{3}\right)^2 - \frac{\omega_E}{3}}$	$\frac{\omega_1 + \omega_E}{2}$	$1 - \frac{L_b(\omega_1 + \omega_E)}{Z_{opt}}$
D	$-2\xi_1 \omega_1$	ω_E	$\frac{1}{2}$
E	$-\xi_1 \omega_1$	ω_E	0

faire cela il semble logique de mesurer la force appliquée ainsi que la vitesse au point considéré. Il n'y a aucun problème pour la vitesse déduite de l'intégration de la valeur de l'accélération mesurée par l'accéléromètre. Par contre lorsque l'on mesure la force appliquée sur la structure par la bobine on mesure également les forces d'inertie de la masselotte à l'intérieur de la cellule de force. Si on considère la force F_1 appliquée pour exciter la poutre, celle-ci est nettement supérieure aux forces d'inertie qui viennent perturber la mesure. Pour P_1 il n'y a donc pas de difficultés pour la mesure de la puissance mécanique. Par contre, la force F_2 étant faible les forces d'inertie ne sont plus négligeables (les 2 forces sont du même ordre de grandeur), ce qui ne permet pas de mesurer la puissance mécanique P_2 avec certitude (on peut avoir une erreur de l'ordre de 50 % de la puissance mesurée). Une autre solution consiste à évaluer la puissance électrique. En effet d'après les lois de couplage (1) utilisées, en supposant que le transducteur est parfait, et qu'il n'y a aucune perte lors de la conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique, on a :

$$P_{meca} = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Vitesse} \times \text{Force} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_{em}}{C_e} \times C_e i dt = P_{elec} \quad (22)$$

Dans la réalité, cette approximation est acceptable car le rendement d'un transducteur électromécanique est supérieur à 90 %. Il est possible de déduire la tension V_2 de la mesure de l'intensité i_2 qui passe dans la boucle de rétroaction de la bobine 2. En effet la mesure de la résistance interne R_b de la bobine permet de connaître la valeur de $V_2 \approx (Z_f + R_b) \cdot i_2 = Z \cdot i_2$ (on néglige l'inductance car on a $L_b \omega \ll R_b$). L'intensité i_2 est mesurée à l'aide d'une sonde à effet Hall pour ne pas perturber le système.

Seules ont pu être testées expérimentalement les valeurs de résistance totale Z supérieures à la résistance de la bobine utilisée $R_b = 0,7 \Omega = 10^{-0,15} \Omega$. Pour valider le fait que la puissance dissipée est maximale lorsque la fréquence d'excitation ω est égale à la pulsation propre de la poutre en flexion (ω_1), la fréquence d'excitation a été utilisée comme un paramètre de réglage. Et nous avons bien observé qu'il fallait remplir la condition $\omega = \omega_1$ pour que la puissance dissipée P_2 soit maximale. Nous avons obtenu les résultats expérimentaux présentés sur la figure 9, qui montrent un très bon accord entre les

Fig. 9. Puissances moyennes maximales fournie (P_1) et dissipée (P_2) en fonction de la résistance totale (Z) : P_1 simulée (+) ; P_2 simulée (•) ; P_1 mesurée (□) ; P_2 mesurée (○).**Tableau 4.** Comparaison des résistances qui maximisent P_2 au point B.

	Analytique	Numérique	Expérimental
Résistance optimale (Ω)	3,2 Ω	3,2 Ω	3,0 Ω
Rendement η	0,500	0,503	0,505

mesures réalisées et les prédictions numériques. La courbe numérique utilisée sur la figure 9 a été extraite des simulations représentées sur la figure 7.

Sur la figure 9 on peut relever la valeur expérimentale de la résistance qui optimise la dissipation d'énergie et aux simulations numériques. Ces valeurs sont placées dans le tableau 4 et comparées à la résistance optimale déterminée analytiquement. On peut donc affirmer que les formules analytiques reflètent bien le phénomène que l'on veut représenter.

5 Conclusion

Cette étude porte sur une structure simple excitée par une force sinusoïdale d'amplitude donnée, et munie d'un transducteur électromagnétique connecté à une boucle de rétroaction passive simulant un dispositif de récupération d'énergie. L'étude des puissances moyennes disponible et dissipée dans le circuit en fonction de l'impédance de la boucle fait apparaître deux points de fonctionnement qui maximisent la puissance dissipée. Cette dernière est alors égale à la moitié de la puissance disponible, et l'amortissement modal équivalent du système bouclé est égal au double de l'amortissement structural. Un troisième point maximise quant à lui l'amortissement équivalent. Bien que la totalité de la puissance disponible soit alors dissipée, la valeur de cette puissance est plus faible que pour les deux points précédents. Ces résultats obtenus dans un premier temps à l'aide d'un modèle numérique sont expliqués par l'étude analytique d'un modèle simplifié et vérifiés expérimentalement. Les travaux futurs porteront sur la mise en œuvre d'une électronique de récupération d'énergie, ainsi que sur l'étude de boucles de rétroaction non-linéaires [10].

Références

- [1] J. Krikke, Sunrise for energy harvesting products, IEEE Pervasive Computing 4 (2005) 4–8

- [2] F. Mileti, I. Kurniawan, J. Tian, S. Sosin, A. Bossche, Generating power from spinning wheels, Delft University of Technology, Summer course DIMES: Oil in the clean-room, 2005
- [3] E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard, L. Petit, D. Guyomar, A comparison between several vibration-powered piezoelectric generators for standalone systems, *Sensors and Actuators A* 126 (2006) 405–416
- [4] B. Cavallier, P. Berthelot, H. Nouira, E. Foltête, L. Hirsinger, S. Ballandras, Energy harvesting using vibrating structures excited by shock, *IEEE Int. Ultrasonics Symp.*, Rotterdam, The Netherlands, 2005
- [5] P. Monnier, M. Collet, Definition of the mechanical design parameters to optimize efficiency of integral force feedback active damping strategy, *J. Structural Control* 12 (2005) 65–89
- [6] P. Glynne-Jones, M.J. Tudor, S.P. Beeby, N.M. White, An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor system, *Sensors and Actuators A* 110 (2004) 344–349
- [7] N.G. Stephen, On energy harvesting from ambient vibration, *J. Sound Vib.* 293 (2006) 409–425
- [8] G.A. Lesieutre, G.K. Ottman, H.F. Hofmann, Damping as a result of piezoelectric energy harvesting, *J. Sound Vib.* 269 (2004) 991–1001
- [9] A. Preumont, *Vibration control of active structures: an introduction*, Kluwer, 2nd edition, 2002
- [10] F. Peano, G. Coppa, C. Serazio, F. Peinetti, A. D’Angola, Nonlinear oscillations in a MEMS energy scavenger, *Math. Comp. Modelling* 43 (2006) 1412–1423