

Relation usinabilité–topographie de la surface usinée. Analyse conventionnelle et par la théorie du chaos

MAXENCE BIGERELLE^{1,2}, JÉRÔME GAVOIS³ ET ALAIN IOST^{1,a}

¹ Arts et Métiers ParisTech, Équipe Caractérisation et propriétés de la Périsurface, Laboratoire de Métallurgie Physique et Génie des Matériaux, CNRS UMR 8517, ENSAM Lille, 8 boulevard Louis XIV, 59046 Lille Cedex, France

² Laboratoire Roberval, UMR 6253, UTC/CNRS, Centre de Recherches de Royallieu, BP 20529, 60205 Compiègne, France

³ Département M2P, ENSAM Lille, 8 boulevard Louis XIV, 59046 Lille Cedex, France

Reçu le 14 janvier 2005, accepté le 29 août 2008

Résumé – Cet article propose d’analyser l’usinabilité en tournage d’un acier martensitique en fonction de la vitesse de coupe par observation topographique de la surface. Nous décrivons d’abord une méthodologie pour chercher le paramètre de rugosité le plus pertinent afin de caractériser l’influence de la vitesse de coupe sur la topographie de la surface obtenue. La moyenne des pentes du profil permet d’estimer une vitesse critique qui correspond à une transition de régime dans le mode d’usinage. Elle met également en évidence l’influence de la vitesse de coupe à l’intérieur de chacun de ces deux régimes, ce qu’un critère plus conventionnel tel que le R_a ne permet pas de différencier. Dans une deuxième partie de cette étude, l’usinabilité est analysée en utilisant la théorie du chaos. Partant de la topographie de la surface usinée, nous développons une méthode originale pour construire un attracteur qui s’avère être bidimensionnel. La construction de cet attracteur résulte de deux fonctions : la première caractérise l’effet de l’écrouissage dû à la coupe et la seconde l’effet de l’adoucissement thermique. À basse vitesse de coupe, ces deux mécanismes deviennent intimement liés et l’attracteur possède un point fixe : la coupe s’effectue par écrouissage généralisé. Au-delà d’une vitesse critique, l’attracteur présente deux états indiquant l’apparition d’une instabilité de coupe. Deux régimes se succèdent : l’écrouissage par cisaillement localisé puis l’adoucissement causé par l’élévation de température. Cette instabilité est confirmée par une augmentation de la dimension fractale avec la vitesse de coupe du profil reconstruit d’après l’attracteur.

Mots clés : Usinabilité / rugosité / vitesse de coupe / acier martensitique / écrouissage / adoucissement / fractale / chaos / attracteur / instabilité

Abstract – Relations between cutting mechanisms in turning process and roughness measurement. Conventional analysis and chaos theory. Quality of the cutting machining process of martensitic steel is analysed as a function of the cutting speed. This analysis is performed by topographical measurement of tooled surfaces. A statistical analysis taking into account more than hundred roughness parameters allows us to prove that the mean slope value of the profile is the best parameter to characterise the cutting speed effect on the surface topography. This roughness parameter discriminates the cutting speed threshold between two cutting stages and moreover, discriminates also the cutting process in each stage (the usual R_a parameter is unable to do it). A mathematical treatment based on the chaos theory is then processed. From the profile of the machined surface, a two-dimensional attractor is constructed. Thanks to an original method, it is shown that this attractor depends on two mathematical functions: the first one characterises the work hardening during the cutting process and the second is related to thermal softening. For a critical cutting speed, these two mechanisms are linked together and lead to a single attracting final state. This stage is governed by generalised work hardening. Above this critical speed, the attractor will present a two branches bifurcation, which means that the cutting process is now alternating between the two different states. This chaotic mode is related to the instability between work hardening

^a Auteur pour correspondance :
alain.iost@lille.ensam.fr

and thermal softening. This instability is confirmed by a fractal analysis based on the reconstructed profiles from the attractor: the higher the cutting speed, the higher the fractal dimension.

Key words: Turning / roughness / cutting speed / martensitic steel / work hardening / thermal softening / fractals / chaos / attractor / instability

Nomenclature

$\mathbf{A}_i$:	Vecteur de paramètres physiques affectés à la phase i
$B(x)$:	Bruit uniforme entre 0 et 1
D :	Dimension euclidienne de l'espace des phases
$M_1, M_2, \dots, M_D$:	Mécanismes créant les points dans le diagramme des phases
$\Pr(A)$:	Probabilité de l'événement
$\hat{p}_i$:	Estimateur de p_i
p_i :	Probabilité de discrimination du paramètre de rugosité indicé par i
q_i :	Paramètre de rugosité indicé par i
R_a :	Rugosité arithmétique du profil
R_t :	Étendue de l'amplitude du profil
T :	Température de coupe
$U(x)$:	Profil usiné modélisé
V_c :	Vitesse de coupe
x :	Abscisse du profil
$x_1, x_2, \dots, x_D$:	Variables dans un espace des phases
$x_1(t), x_2(t), \dots, x(t)_D$:	Profil construits sur chaque variable $x_1, x_2, \dots, x_D$
$z(x)$:	Amplitude du profil à l'abscisse x
β :	Facteur compris entre 0 et 100
$\frac{\partial \tau}{\partial \gamma}$:	Écrouissage
Δ_a :	Moyenne des pentes du profil
γ :	Déformation de cisaillement généralisée
τ :	Contrainte de cisaillement généralisée

1 Introduction

Pour répondre aux contraintes dimensionnelles ou éviter la présence de défauts pouvant entraîner une dégradation des propriétés mécaniques en service (présence de fissures qui nuisent à la tenue en fatigue, taux d'écrouissage élevé engendrant des contraintes résiduelles de surface importantes...), la qualité des surfaces usinées se doit d'être sans cesse améliorée. Par ailleurs, la maîtrise de l'état de surface de la pièce usinée conditionne l'efficacité d'un procédé ultérieur (adhérence, adhésion, comportement tribologique, etc.). Il est donc nécessaire de connaître l'influence des paramètres de coupe ou plus précisément, l'interaction outil-matière. Nous étudions ce système en analysant la topographie de la surface usinée sous le seul angle de la rugosité. Dans une première partie, nous analysons l'influence de la vitesse de coupe à l'aide de paramètres conventionnels de rugosité en utilisant une méthode originale développée dans notre

laboratoire. Nous introduisons ensuite la théorie du chaos pour expliquer la transition entre l'écrouissage généralisé et l'écrouissage localisé.

2 Matériaux et méthodes expérimentales

Les surfaces étudiées proviennent d'un acier inoxydable martensitique du type Z210CW12 dressées à des vitesses de coupe, V_c , comprises entre 65 à 200 m.min⁻¹. L'avance par tour est de 0,15 mm et la profondeur de passe de 0,5 mm. La rugosité des surfaces est mesurée perpendiculairement aux stries d'usinage à l'aide d'un profilomètre mécanique Tencor P10. La longueur d'acquisition de 15 mm est mesurée à une vitesse de 400 $\mu\text{m.s}^{-1}$. Pour la fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz, le profil discrétisé est composé de 37 500 points, soit une mesure d'amplitude tous les 0,4 μm , ce qui est suffisant pour appliquer la transformée de Fourier rapide. La figure 1 présente des profils obtenus à différentes vitesses de coupe où l'altitude (en μm) de la surface est fonction de l'abscisse de palpée (en μm).

3 Analyse conventionnelle de la rugosité

3.1 Méthodologie du classement de la pertinence des paramètres de rugosité

L'objet principal des études en morphologie des surfaces consiste à résumer l'information de manière optimale. La surface obtenue par un mécanisme opératoire ou physique peut être décrite par une multitude de paramètres de rugosité. La recherche des paramètres pertinents est complexe, et il n'est guère possible en l'état actuel de déterminer une méthode universelle applicable à toutes les études de rugosité. Pour cerner le problème lié à la détermination des paramètres influents, nous avons montré [1, 2] qu'une étude de rugosité peut être mise sous forme d'un système matriciel. Cette approche permet d'avoir un nouveau regard sur l'analyse de la variance et de déterminer la pertinence des paramètres. Nous utilisons la technique « Bootstrap » d'analyse de données pour les raisons suivantes :

- * Notre approche statistique nécessite le calcul d'un grand nombre de paramètres d'état de surface pour toutes les mesures effectuées.
- * La méthode de recherche des paramètres influents doit être robuste.
- * Le nombre important de paramètres interdit d'utiliser une analyse statistique individuelle et de vérifier les hypothèses de l'inférence statistique de l'analyse de données.

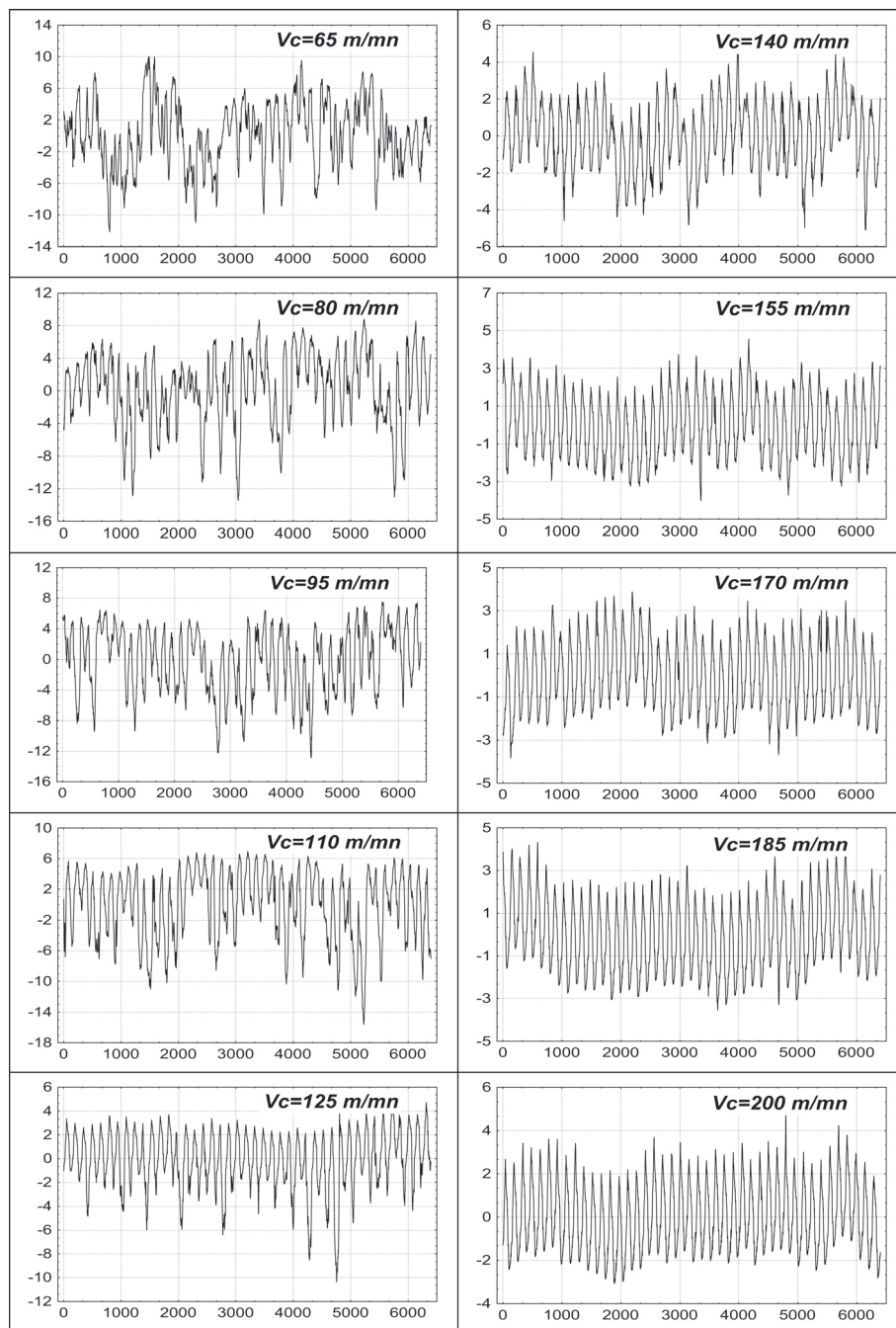


Fig. 1. Altitude des profils de rugosité des surfaces usinées (en μm) obtenus à différentes vitesses de coupe, en fonction de la longueur d'évaluation (en μm).

Le principe du Bootstrap, créé en 1979 par Efron [3, 4] pour interpréter des données qui violent les hypothèses de l'inférence statistique, consiste à effectuer un sur-échantillonnage des données pour calculer un grand nombre de fois l'estimateur de base de la statistique recherchée. Les techniques du sur-échantillonnage vulgarisées par Hall [5], Shao et Tu [6], consistent à extraire un échantillon à partir de la série de données initiale, construire une statistique sur cet échantillon, puis à reproduire cette statistique un grand nombre de fois dans le

but d'analyser le comportement de la série initiale. La difficulté majeure de cette technique consiste à ne pas « oublier » que ces données ne sont que des répliques et qu'elles n'ont pas la même crédibilité que les données initiales ; en ce sens, « bootstraper » demande une certaine connaissance de la statistique pour éviter cet écueil. Écrire un sur-échantillonnage revient à appeler un grand nombre de fois une procédure de la statistique, ce qui requiert une optimisation numérique importante au contraire des routines de logiciel de statistique prévues pour n'être appelées

qu'une seule fois. Pour traiter notre problème, nous utilisons une méthode originale d'analyse de la variance sur-échantillonnée. Notre système physique est décrit par un paramètre à plusieurs niveaux (vitesse de coupe) et fournit une multitude de paramètres de sortie (paramètres de rugosité). Pour résoudre ce problème, nous utilisons une extension de la méthode d'analyse de la variance (ANOVA). Le problème est formulé en ces termes : parmi n paramètres, k mesures faites sur p échantillons, quel est le paramètre qui discrimine au mieux les p échantillons ?

Quel est le paramètre q_i qui contient le maximum d'information vis-à-vis de la classe j ? L'analyse de la variance permet d'estimer l'influence d'une classe. Sous l'hypothèse d'une répartition gaussienne et de l'homogénéité des variances affectées à un paramètre, cette méthode définit une variable de Fisher F_i et une probabilité critique p_i affectée au paramètre q_i représentant la probabilité d'affirmer à tort que le paramètre q_i est influent. Plus F_i sera grand, et plus le paramètre p_i sera discriminant. La théorie classique de l'analyse de la variance suppose que la variable F_i n'est pas en elle-même une variable aléatoire. Or, une variation des données entraîne une variation de cette probabilité critique. De ce fait, un intervalle de confiance de F_i est construit à l'aide de la méthode de sur-échantillonnage.

3.2 Analyse des résultats par la méthode Bootstrap

Nous avons analysé la pertinence de 95 paramètres de rugosité pour chacune des 10 vitesses de coupes (et des 30 profils relevés par vitesse de coupe) à l'aide du logiciel Mesrug, software développé par nos soins [1]. Ces paramètres peuvent se classer en 4 catégories : les paramètres d'amplitude (R_a , R_t ,...), de fréquence (nombre de pics, moments spectraux, longueur d'auto-corrélation...), hybrides (pentes de profils, développée de la surface,...) et finalement les paramètres issus de l'analyse fractale (dimension fractale, pente de la densité spectrale...). Chacun des 95 paramètres est calculé 30 fois pour chaque vitesse de coupe et regroupé dans 10 classes. Nous pouvons effectuer l'analyse de variance par Bootstrap pour chaque paramètre i , puis procéder au classement par variable F_i de Fisher décroissante. Plus grande est cette valeur, plus discriminant est le paramètre vis-à-vis du paramètre « vitesse de coupe » (Fig. 2). Les trois paramètres les plus pertinents sont respectivement la valeur moyenne des pentes du profil ($F = 1726$), la développée du profil ($F = 1413$) et le R_a ($F = 1042$). Cette différence est hautement significative car le Bootstrap nous permet de tracer les histogrammes des valeurs de F affectées à ces trois paramètres et l'analyse visuelle (Fig. 3) suffit pour constater que le R_a n'est pas le paramètre le plus pertinent pour caractériser l'effet de la vitesse de coupe sur l'usinabilité du matériau. De plus, en analysant les graphiques représentants les « Box and Whiskers » de ces trois paramètres (Fig. 4), force est de constater que le R_a possède une dispersion telle que certaines vitesses de coupe donnent statistiquement la même valeur (par exemple $V_c = 95 \text{ m.min}^{-1}$ et $V_c = 110 \text{ m.min}^{-1}$), ce qui

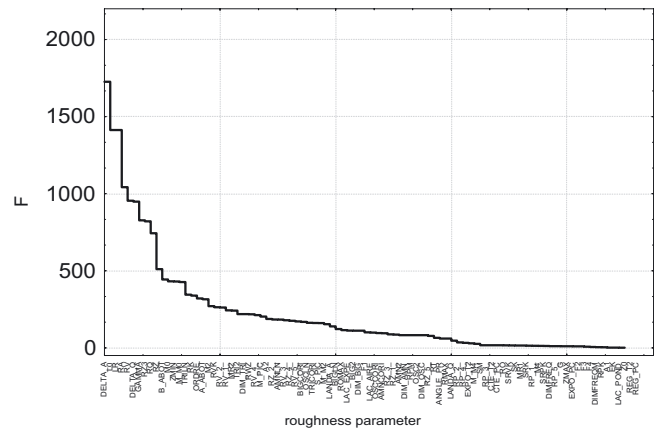


Fig. 2. Évolution de la valeur du F de Fisher pour les paramètres de rugosité retenus.

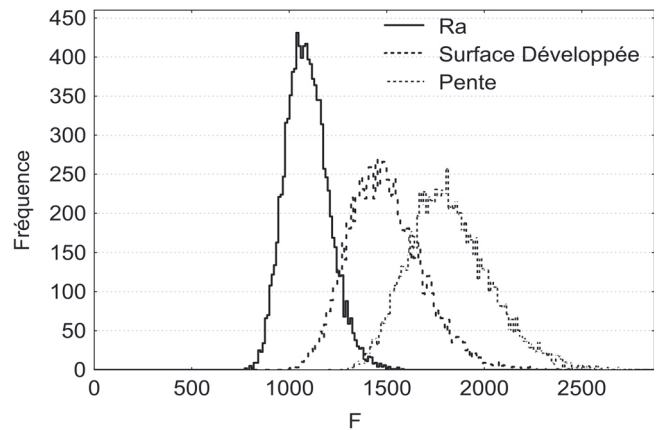


Fig. 3. Histogramme du F de Fisher pour les trois paramètres les plus pertinents vis-à-vis de la vitesse de coupe : la pente moyenne des profils, la surface développée et la rugosité arithmétique.

n'est pas le cas ni pour la développée du profil ni pour les pentes moyennes. Deux autres études menées sur la pertinence de ces paramètres confirment ce fait. Nous aboutissons à la même conclusion en utilisant un rugosimètre portable Perthometer M4Pi (rayon de courbure du palpeur $5 \mu\text{m}$, palpeur à patin) avec seulement 8000 points de discrétisation par profil. Ceci induit deux remarques primordiales : la tendance trouvée sur les pentes ainsi que sur la développée n'est pas un artefact expérimental (effet de l'échelle de discrétisation, rayon de courbure du palpeur, vitesse de mesure...) lié à la topographie particulière des surfaces usinées [7]. Cette tendance prouve également que la qualité de l'usinabilité peut être quantifiée in situ, sans démontage de la pièce, à l'aide d'un rugosimètre portable par analyse des pentes du profil. Il est donc possible d'optimiser en temps réel les paramètres de coupe par analyse directe de la surface usinée. Cette approche ouvre une perspective intéressante dans le domaine de la mesure « industrielle » pour quantifier le potentiel d'usinabilité d'un matériau. Par une technique de plans d'expériences, nous pouvons envisager de bâtir un protocole qui permette (via la mesure de rugosité) de

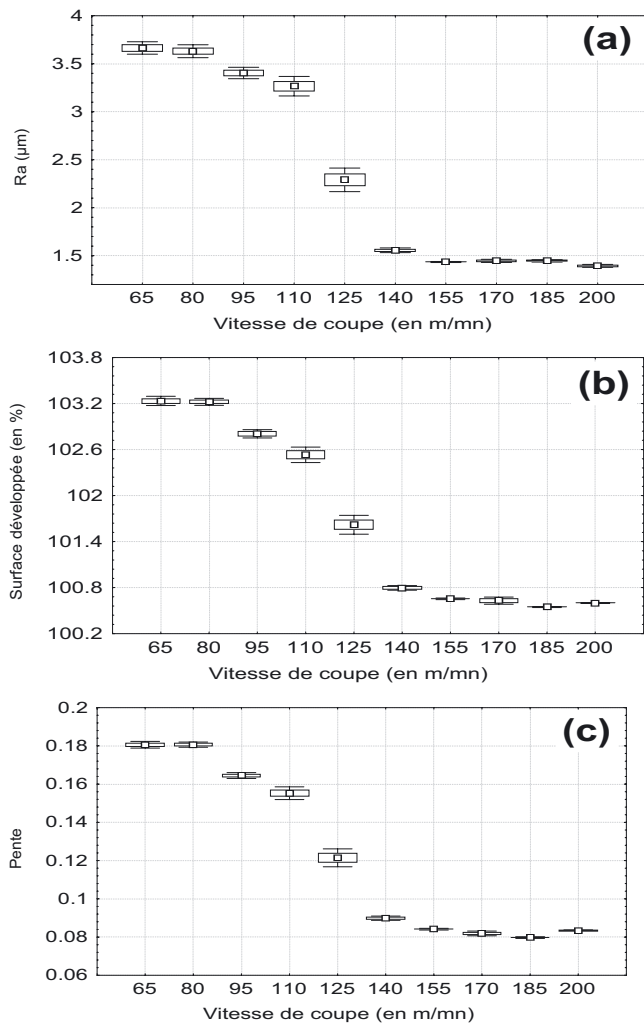


Fig. 4. Évolution des 3 paramètres de rugosité les plus pertinents en fonction de la vitesse de coupe.

choisir les paramètres de coupe (avance, vitesse, profondeur de passe, lubrifiant, nature de l'outil...) afin d'optimiser les conditions de coupe menant à l'usinabilité optimale et garantir un certain état de surface.

Nous allons proposer une interprétation concernant la pertinence de la pente du profil Δ_a .

$$\Delta_a = \frac{1}{L} \int_0^L \left| \frac{\partial z(x)}{\partial x} \right| dx \quad (1)$$

Pour une vitesse inférieure à 125 m.min⁻¹, le profil paraît plus « désordonné » alors qu'il présente nettement une composante périodique avec un faible « bruit » pour une vitesse supérieure à cette valeur. Analysons la formule (1). L'observation des profils expérimentaux montre que lorsque le bruit diminue (V_c croît) Δ_a diminue. Sans connaître l'expression analytique de $z(x)$, il n'est guère évident de quantifier l'effet d'un bruit sur les pentes du profil. Pour cela, nous allons procéder à une simulation numérique en ajoutant un bruit uniforme haute fréquence $B(x)$, borné entre 0 et 1, à des profils $U(x)$ caractérisant

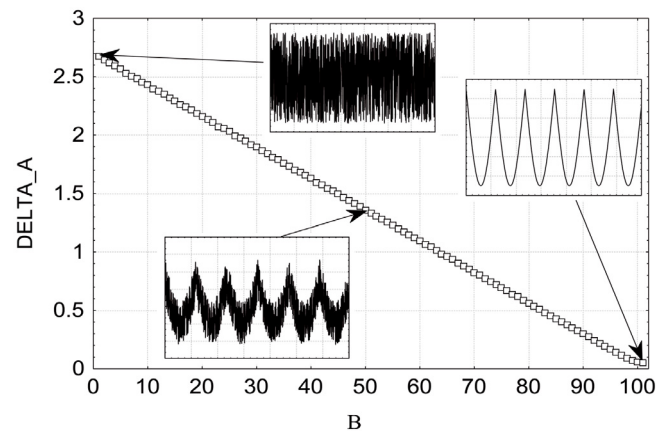


Fig. 5. Évolution de la pente moyenne des profils estimée sur des profils simulés avec bruit ($B = 0$) et sans bruit ($B = 100$).

l'usinage sans bruit; puis en faisant varier l'amplitude du bruit tout en gardant l'amplitude globale du profil constante. Le profil simulé s'écrit :

$$z(x) = R_t/50 [\beta U(x) + (100 - \beta)(B(x) - 0,5)] \quad (2)$$

La figure 5 représente l'évolution de Δ_a en fonction du bruit caractérisé par le coefficient β (0 pour un bruit blanc et 100 pour le profil usiné exempt de bruit). Δ_a décroît avec β , c'est-à-dire avec l'augmentation du bruit. Cette simulation confirme la dépendance des pentes des profils vis-à-vis d'un bruit (ici « bruit » dû à de l'arrachement de matière plutôt qu'à un cisaillement localisé).

3.3 Interprétation

Dans un premier temps, il est aisé de constater que le critère Δ_a qui permet de discriminer la zone de transition est plus élevé pour les vitesses faibles. Trois raisons peuvent être avancées :

- Quand la vitesse augmente, la coupe paraît plus nette et la question se pose de savoir si la profondeur de passe apparente ne dépend pas de la vitesse de coupe. En d'autres termes, la profondeur des stries dépend-elle de la vitesse de coupe ?
- Quand la vitesse décroît, la coupe est plutôt obtenue par écoulement généralisé qui entraîne une augmentation de la puissance nécessaire pour effectuer la coupe [8]. Cette puissance dissipée pourrait entraîner une vibration basse fréquence de la structure susceptible d'introduire dans le profil des composantes d'amplitude basses fréquences.
- L'écoulement généralisé ne permettant pas une coupe nette, la coupe effectuée par plasticité est moins nette que celle obtenue par cisaillement localisé. Cette méthode de coupe est donc davantage sujette aux fluctuations du rayon de la zone plastifiée ce qui engendre un bruit sans signature fréquentielle qui est présent sur la totalité du profil.

Pour trancher entre ces trois hypothèses, nous allons effectuer une transformée de Fourier sur les profils usinés. La transformation de Fourier est un outil assez performant pour analyser un profil de pièce usinée car, en première approche, ce profil peut être assimilé à une demi-sinusoïde alternée. Or la convergence de la puissance spectrale $P(f)$ en fonction de la fréquence f , qui varie selon la loi $P(f) \propto 1/f^2$, présentera donc un spectre avec un faible nombre d'harmoniques significatives. Nous effectuons pour chaque profil sa transformée de Fourier discrète qui fournit un spectre discrétisé ($f_i, P(f_i)$). Disposant de 30 profils par vitesse de coupe, il est alors possible d'effectuer des statistiques par classe de fréquences comme par exemple le spectre moyen

discrétisé $\left(\sum_{j=1}^{30} f_{v_c,j,i}/30, \sum_{j=1}^{30} P(f_{v_c,j,i})/30 \right)$ où $P(f_{v_c,j,i})$

représente la puissance spectrale affectée à la fréquence f_i du $j^{\text{ème}}$ profil obtenu pour une vitesse de coupe V_c . La figure 6a représente ce spectre moyen pour chaque vitesse de coupe. Chaque spectre contient un pic proche de $150 \mu\text{m}$ (Fig. 6b) qui correspond à l'avance par tour ($0,15 \text{ mm.tour}^{-1}$). Il serait pertinent d'analyser précisément la position de ce maximum en fonction de la vitesse de coupe. La figure 7, représentant l'évolution de l'estimation numérique de la période pour chaque vitesse de coupe, permet de constater que la valeur théorique de $0,15 \text{ mm}$ est atteinte indépendamment de la vitesse de coupe avec une précision de $\pm 0,2 \mu\text{m}$. Le désordre apparent du profil ne nuit en rien à la périodicité remarquable du signal, l'avance est donc véritablement bien maîtrisée dans l'usinage pratiqué, même en cas de coupe par écouissage généralisé. Nous allons maintenant analyser l'évolution de l'amplitude maximale de ce pic (fondamental) en fonction de la vitesse de coupe (Fig. 8). L'amplitude du fondamental varie de 4,3 à 4,9 et cette variation, bien que significative, est nettement inférieure à la variation du niveau du bruit (i.e. l'amplitude hors des pics, Fig. 6b). Si nous admettons, en première approximation, que les amplitudes des fondamentaux sont constantes, la rugosité propre à la coupe est donnée par la profondeur de passe (l'avance et la forme de l'outil étant inchangées) ce qui permet de rejeter la première hypothèse. De ce fait, l'usinabilité peut se mettre sous forme de la somme de deux fonctions indépendantes : une fonction périodique de coupe qui dépend de l'avance, de la forme de l'outil et de la profondeur de passe ; et une fonction bruit, apériodique, qui caractérise l'usinabilité.

Afin de visualiser ce mécanisme, nous allons simuler le profil usiné $U(x)$ et lui additionner un bruit blanc unitaire $B(x) \in [0...1]$. Le signal est créé dans les conditions de discrétisation identiques (longueur et pas d'échantillonnage) à celles utilisées pour les profils expérimentaux. La hauteur du profil devient :

$$z(x) = R_t U(x) + \beta(B(x))$$

La figure 9 représente le spectre moyenné sur 5 profils pour β compris entre 0 et 1. L'amplitude du fondamental reste constante quel que soit le bruit (le spectre d'un bruit blanc est constant quelle que soit la fréquence). Si le

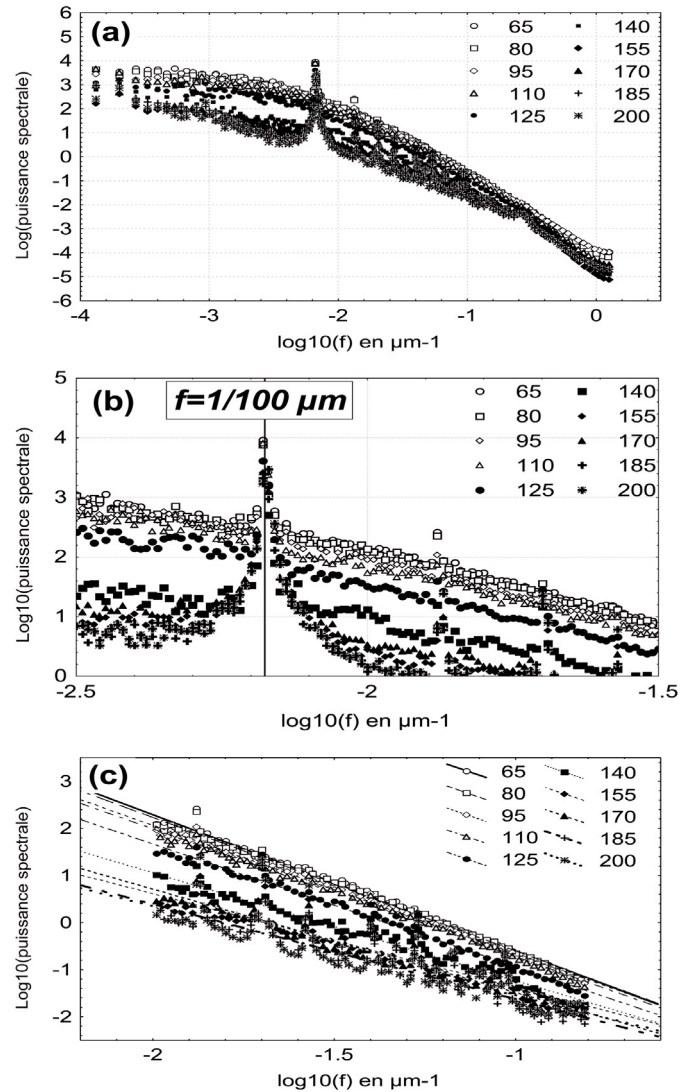


Fig. 6. (a) Spectres de puissance des profils (en log 10) de la figure 1 en fonction de la fréquence (en log 10). (b) Zoom des spectres (a) autour de la valeur du fondamental. (c) Analyse de la pente du spectre pour différentes valeurs de vitesse de coupe.

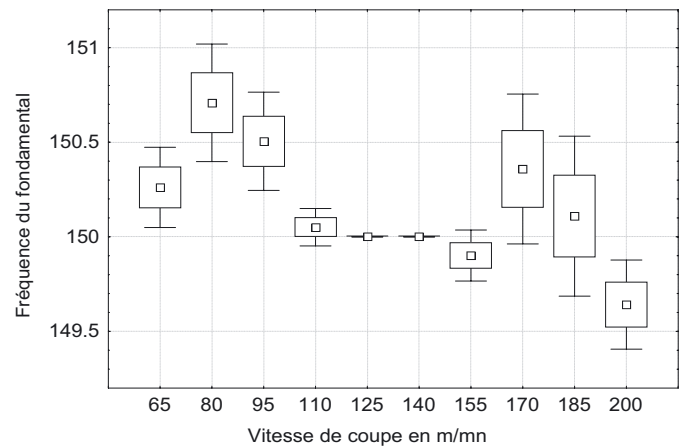


Fig. 7. Graphe de la longueur d'onde du fondamental en fonction de la vitesse de coupe.

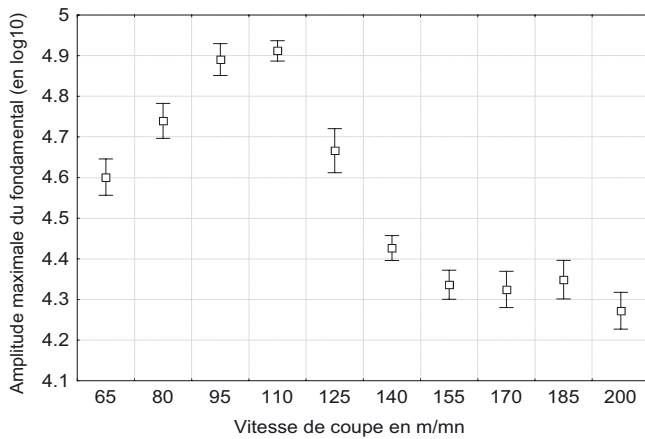


Fig. 8. Graphe de l'amplitude du fondamental pour différentes vitesses de coupe.

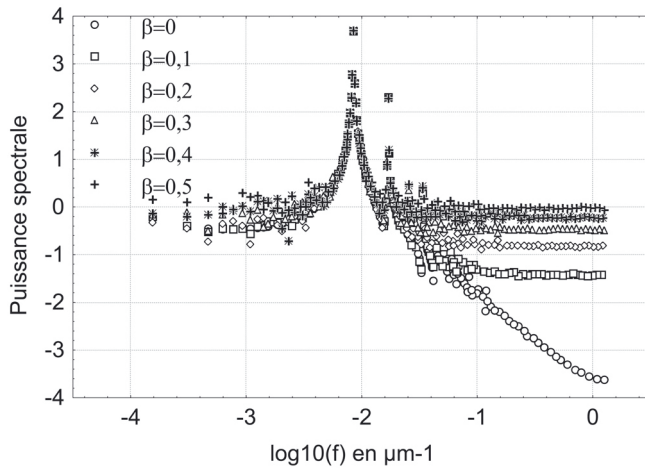


Fig. 9. Spectres de puissance des profils simulés (en log 10) en fonction de la fréquence (en log 10) avec addition d'un bruit blanc unitaire $B(x)$ avec $\beta \times B(x)$.

spectre d'un profil suit la relation puissance $P(f) \propto 1/f^\alpha$ alors, sous certaines conditions [9], la dimension fractale du profil est donnée par la relation $\Delta = (5 - \alpha)/2$. Pour $\beta = 0$, nous obtenons une valeur de pente du spectre α qui conduit à une dimension de 1,5 ce qui est faux puisqu'elle devrait être égale à l'unité pour une sinusoïde. Cette erreur est systématique quand la dimension fractale est estimée avec la relation précédente par la méthode du spectre sur des fonctions sinus (Weierstrass-Mandelbrot) pour des valeurs théoriques inférieures à 1,5. Cette erreur qui n'est pas ni due à un problème de discrétisation, ni à la méthodologie de moyennage du spectre, est analysée par Brewer et al. [10]. L'analyse du spectre des surfaces usinées ne présente aucun pic pour les basses fréquences ($\log(f) < -2,5$) et de ce fait la croissance du R_a à faible vitesse de coupe ne peut être due à une vibration de la machine qui, dans ce cas, aurait engendré des composantes périodiques sur les profils.

Nous devons donc admettre que la valeur élevée du R_a à faible vitesse de coupe ne peut être due qu'à un bruit caractéristique de l'écrouissage généralisé. Il serait donc

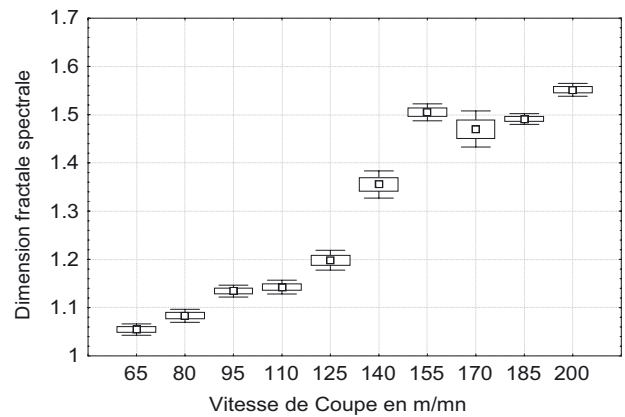


Fig. 10. Évolution de la dimension fractale calculée d'après le spectre en fonction de la vitesse de coupe.

pertinent d'analyser plus finement les caractéristiques de ce bruit en utilisant l'analyse fractale. Les spectres sur la figure 6 présentent 3 régimes :

Régime 1 : Basse fréquence, puissance spectrale constante. Il n'y a plus de corrélation entre 2 hauteurs du profil distantes de la période associée à cette fréquence (hormis pour la forme macroscopique de la surface). De ce fait, le spectre apparaît comme un bruit blanc caractérisant la décorrélation spatiale du bruit d'usinage à cette échelle.

Régime 2 : Régime fractal, le spectre varie en $P(f) \propto 1/f^\alpha$. Nous allons choisir d'analyser la pente des spectres, en coordonnées bi-logarithmiques, pour une fréquence supérieure à celle du fondamental du profil. Cela revient à analyser le régime pour une distance inférieure à 0,1 mm ce qui correspond à la largeur d'une strie d'usinage. La figure 6c représente ces spectres avec leur droite de régression associée, et la figure 10 l'évolution de la dimension fractale calculée d'après ces pentes en fonction de la vitesse de coupe. Nous constatons une croissance quasi linéaire de la dimension pour des vitesses de coupe inférieures à $140 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$: de 1,05 ($65 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$) à 1,25 ($125 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$). La dimension initiale, proche de la dimension euclidienne, correspond à un profil peu accidenté qui tend à devenir plus tourmenté quand la vitesse de coupe augmente. Nous émettons l'hypothèse que l'écrouissage généralisé responsable de la coupe devient de plus en plus hétérogène par hétérogénéité de la répartition des zones plastiques quand la vitesse de coupe augmente. Pour une vitesse de $140 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$, un transition qui marque un changement de régime apparaît avec une brusque augmentation de la dimension fractale. La coupe par écrouissage généralisé devient une coupe par cisaillement due à un écrouissage localisé. La coupe se produit alors par instabilité entre deux mécanismes physiques : quand la vitesse de déformation augmente, le matériau est vu plus dur, alors que le cisaillement induit une augmentation très importante de température qui adoucit le métal. Ces deux mécanismes s'alternent et donnent alors un comportement chaotique instable à deux niveaux (nous traiterons plus précisément l'usinabilité par

la théorie du chaos dans le chapitre suivant). De ce fait, le profil de coupe contiendra des informations sur ces deux mécanismes successifs et en particulier sur la dimension fractale. Notons que celle-ci est quasi constante dans ce régime et égale à 1,5. Cette valeur de dimension correspond à un spectre caractéristique d'un processus brownien où l'amplitude en un point x dépend uniquement de l'amplitude précédente en un point $x - dx$ ce qui serait cohérent avec notre approche. Cette approche sera confirmée à l'aide de calcul de dimension fractale par une autre méthode (Sect. 4.3, Fig. 27).

Régime 3 : Régime euclidien : aux très hautes fréquences, on observe un changement de pente causé par l'effet de lissage relatif au rayon de courbure de la pointe du palpeur. Il s'agit donc d'un artefact de la mesure tactile.

4 Analyse par la théorie du chaos

4.1 Approche de la problématique

Nous avons montré que l'usinabilité peut être caractérisée par l'utilisation des paramètres conventionnels de rugosité. Parmi une centaine de paramètres, le plus discriminant est la pente moyenne des profils qui met en évidence la transition entre l'érouissage généralisé (faible vitesse, pentes des profils élevées) et l'érouissage localisé (forte vitesse, pentes des profils faibles) [11]. Dans cette partie, nous allons tenter de montrer que cette transition est relative à une instabilité qui peut être analysée par la théorie du chaos.

Il est important maintenant de séparer deux types de comportements pouvant entraîner une modification de la surface. Le premier, connu sous le terme de broutage, a pour origine un aspect vibratoire de l'outil : le défaut apparent se traduit par la présence de motifs relativement périodiques de la topographie (sauf en cas d'instabilité). La modélisation de ce phénomène fait appel à la résolution de deux équations différentielles du deuxième ordre de type propagation. Le système outil-matière est caractérisé par un système masse-ressort qui implique une modélisation dans le domaine élastique. Dans ce cas, un couplage entre ces deux équations peut entraîner une situation instable qui est bien caractérisée par la théorie du chaos [12–14]. Dans le deuxième cas, la modification de la topographie de la surface est relative à un transitoire dû à la compétition entre l'érouissage et l'adoucissement thermique. Une surface s'usinerait d'autant mieux que nous serons en présence d'un cisaillement localisé. Par contre la surface devient faiblement usinable et la coupe aura lieu par arrachement de matière si l'érouissage est prédominant. La transition se produit quand les effets de l'érouissage du matériau sont équilibrés par ceux de l'adoucissement thermique.

Ces deux approches (broutage et usinabilité) semblent être difficilement reliées. Nous pensons que l'approche « broutage » est purement un problème oscillatoire qui va entraîner une perturbation de la morphologie de la surface

sur des échelles nettement plus importantes que celles correspondant à l'interaction outil-matière. Dans ce dernier cas la question se pose de savoir s'il est possible d'aborder la caractérisation outil-matière par la théorie du chaos. Le principe général de notre approche est le suivant : pour l'érouissage généralisé, le mécanisme d'érouissage est le seul phénomène prépondérant alors que pour le cisaillement localisé nous postulons que deux mécanismes sont en concurrence : l'adoucissement dû à la chaleur dégagée lors de la coupe et l'érouissage qui tend à durcir le matériau. Nous nous trouvons en présence d'une structure instable où l'érouissage va tantôt être prédominant et tantôt faible devant l'adoucissement thermique. Deux états vont alterner et ce d'autant plus que la vitesse de coupe sera importante, ce qui pourra être analysé par l'observation de la surface usinée. Nous introduirons ensuite brièvement les concepts de l'analyse de surface par la théorie du chaos avant de proposer une approche originale de traitement des données basée sur des projections orthogonales afin de visualiser le comportement chaotique (ou non) du système. Cette méthodologie sera appliquée à des profils simulés (sinusoïde, sinusoïde bruitée, surface brownienne, bruit). Dans la dernière partie, nous étudierons par la théorie du chaos les surfaces de l'acier martensitique usiné avec différentes vitesses de coupe. Après une ébauche d'interprétation, nous ouvrirons les perspectives d'une telle approche.

4.2 Approche de l'usinabilité par la théorie du chaos

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, il apparaît une transition désordre-ordre de l'aspect des profils quand la vitesse de coupe augmente. Cette transition peut être relative à la concurrence de deux mécanismes qui introduit des perturbations. Nous pouvons alors penser que cette transition est caractéristique de celles rencontrées dans la théorie du chaos que nous allons tenter d'appliquer [15]. Il est nécessaire de séparer les systèmes dits hamiltoniens (conservatifs) des systèmes qui sont le siège d'un frottement interne (dissipatifs). Seuls ces derniers possèdent un attracteur par le fait que la dissipation (ici création de dislocations, élévation de température,...) entraîne l'existence d'une limite stationnaire avec le temps, lorsque l'énergie (ici la puissance de coupe) est injectée de l'extérieur. Il serait hors de propos dans cet article de résumer cette théorie en quelques pages et nous nous limiterons aux outils nécessaires à sa caractérisation et son interprétation.

La surface est créée par un ou plusieurs mécanismes, que nous supposerons inconnus et notés $M_1, M_2, \dots, M_D$. Ces mécanismes dépendent de variables dans un espace des phases que nous noterons $x_1, x_2, \dots, x_D$. Supposons que le système puisse se mettre sous la forme :

$$\partial x_i(t)/\partial t = M_i(\mathbf{A}_i, x_1(t), x_2(t), \dots, x_D(t)) \quad (3)$$

où $\mathbf{A}_i$ est un vecteur de paramètres physiques pas forcément indépendant de t .

Supposons que x_1 soit l'amplitude du profil et t la longueur palpée (car, la vitesse de coupe étant constante, la

longueur du profil est proportionnelle à t). L'attracteur est défini dans le D -volume par $(x_1(t), x_2(t), \dots, x(t)_D)$ qui permet d'étudier le comportement du système M . Il existe cependant deux difficultés majeures : comment trouver $x_2(t), \dots, x(t)_D$ et quelle est la dimension du volume de l'espace des phases ? Des techniques récentes permettent de déterminer $x_2(t), \dots, x(t)_D$ et le choix de D sera fait par une technique originale.

4.3 Bases théoriques

Nous allons choisir d'illustrer les outils qui seront utilisés par la suite pour analyser les profils usinés en les appliquant sur l'un des attracteurs les plus étudiés dans la théorie du chaos, à savoir l'attracteur de Hénon.

4.3.1 L'attracteur de Hénon

L'astronome français Hénon (1976) a obtenu un attracteur bidimensionnel de l'attracteur de Lorenz (3D) en considérant l'intersection d'un fluide soumis à de la convection naturelle avec une section transversale à la direction du flux [16]. Le système discrétisé en temps est donné par :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= y(t) + 1 - a[x(t)]^2 \\ y(t+1) &= b x(t) \end{aligned} \quad (4)$$

avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$, le graphe (x, y) représente l'attracteur qui possède une structure multi-fractale, signifiant que la répartition du fluide dans l'espace n'est pas uniforme. La figure 11a représente l'attracteur de Hénon. Nous pouvons également tracer la fréquence avec laquelle un point de l'attracteur tombe dans une cellule de taille fixée. Pour cela nous avons discrétisé la zone de l'attracteur en un maillage de 1000×1000 et simulé 10^8 itérations de l'attracteur. La figure 11b représente la densité de probabilité de présence dans l'espace des phases de l'attracteur qui, comme nous pouvons le constater visuellement, possède une structure multi-fractale. De même, il est intéressant d'étudier le comportement de l'attracteur en fonction du paramètre a de l'équation (4). Pour cela le diagramme de Feigenbaum (Fig. 12) représente l'évolution de $x(t)$ en fonction de a . Il présente des divisions successives appelées bifurcations, signes de l'émergence du chaos.

4.3.2 Le théorème des retards

Nous nous intéressons maintenant à la dynamique responsable des variations spatiales de l'amplitude des profils des surfaces usinées. Dans notre cas l'attracteur n'est pas connu et nous devons le construire à l'aide du profil par la méthode des retards [17]. Définissons un vecteur :

$$z(n) = (y(n), y(n+k\tau), y(n+2k\tau), \dots, y(n+(D-1)k\tau)) \quad (5)$$

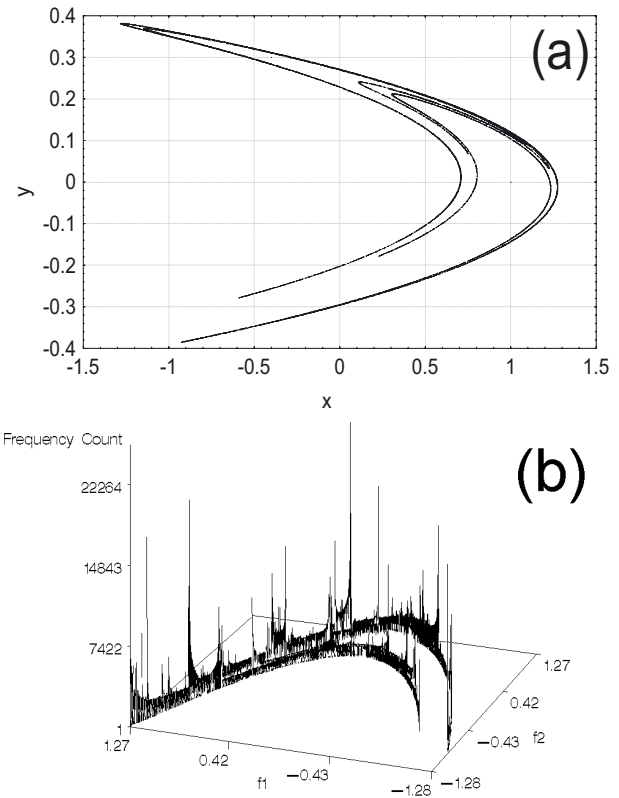


Fig. 11. Attracteur de Hénon dans le plan $x-y$ (a) et densité de probabilité empirique de présence des points (x, y) (b).

où $y(n)$ représente l'amplitude du $n^{\text{ième}}$ point du profil, τ son pas d'échantillonnage et k un nombre à déterminer. Le vecteur $y(n)$ présente une pseudo-phase de l'évolution d'un état vers un autre. Le problème consiste à déterminer la longueur caractéristique k ainsi que la dimension de l'attracteur D . Parmi les méthodes existantes nous proposerons celle qui permet de visualiser des projections de l'attracteur de manière à déterminer la dimension D à partir de laquelle l'information introduite n'apporte plus d'information. Ce théorème affirme que le point $z(n)$ est un point de l'attracteur à une homothétie près. Appliquons ce théorème à l'attracteur de Hénon. La figure 13a représente l'évolution de la position sur l'axe x de l'attracteur. Nous savons que la dimension de l'attracteur est de 2, ainsi tracer les vecteurs $z(n) = (y(n), y(n+1))$ suffit pour recréer l'attracteur à un facteur près (Fig. 13b).

4.4 Le théorème des projections

Soit E la dimension euclidienne de l'attracteur, et D celle de l'attracteur définie par le vecteur des retards $z(n) = (y(n), y(n+k\tau), y(n+2k\tau), \dots, y(n+(D-1)k\tau))$ avec $D \geq E$. Soit G le graphe avec $\dim G = E \geq D$ défini tel que l'inertie du nuage de points $z(1), z(1), \dots, z(N)$ projeté sur le sous-espace de dimension E soit maximale. Alors les dimensions de Renyi (et

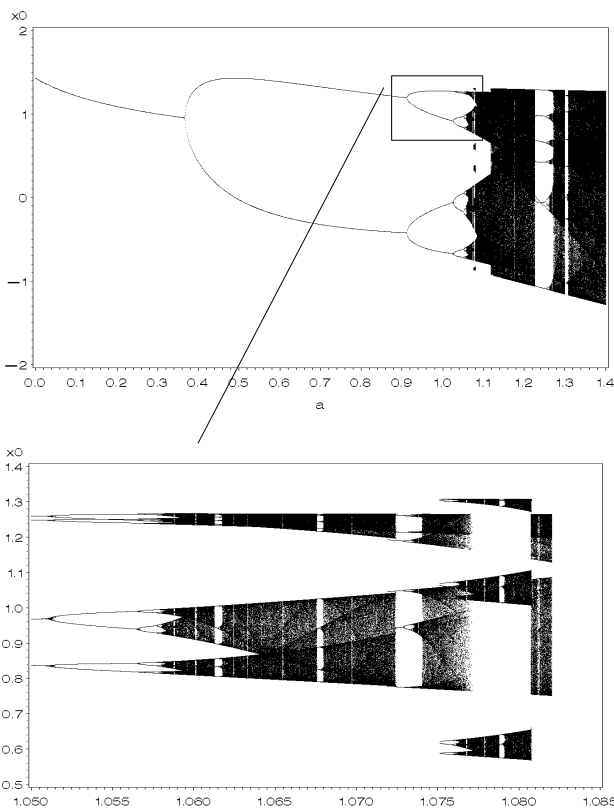


Fig. 12. Diagramme de Feigenbaum de l'attracteur de Hénon en fonction du paramètre a .

donc le spectre multi-fractal) construits sur G sont identiques aux dimensions de l'attracteur.

En d'autres termes, nous ne changeons pas les caractéristiques fractales de l'attracteur pourvu que la dimension de l'espace projeté soit identique à celle de l'attracteur. L'intérêt majeur, comme nous le verrons par la suite, consiste à visualiser l'attracteur avec le maximum d'information pour rechercher les caractéristiques de la dynamique du signal. Cependant il ne faut pas oublier que les vecteurs supportant les axes du plan deviennent des combinaisons linéaires des vecteurs d'origine par cette transformation, c'est-à-dire que chaque axe sera une combinaison linéaire des variables de phase de l'attracteur. La figure 14 représente la projection de l'attracteur de Hénon sur les deux premiers axes.

4.5 Analyse de profils simulés

4.5.1 Analyse d'une sinusoïde

Le profil de la surface usinée contient par essence une périodicité, même si parfois celle-ci n'est pas détectable sans l'emploi de l'outil mathématique adéquat (transformée de Fourier). De ce fait nous allons dans un premier temps illustrer et analyser notre méthode sur une sinusoïde. Nous calculons les vecteurs des retards et traçons le graphe $(y(n_i), y(n_i + 1))$ qui représente l'attracteur en dimension 2 (Fig. 15). La forte corrélation linéaire

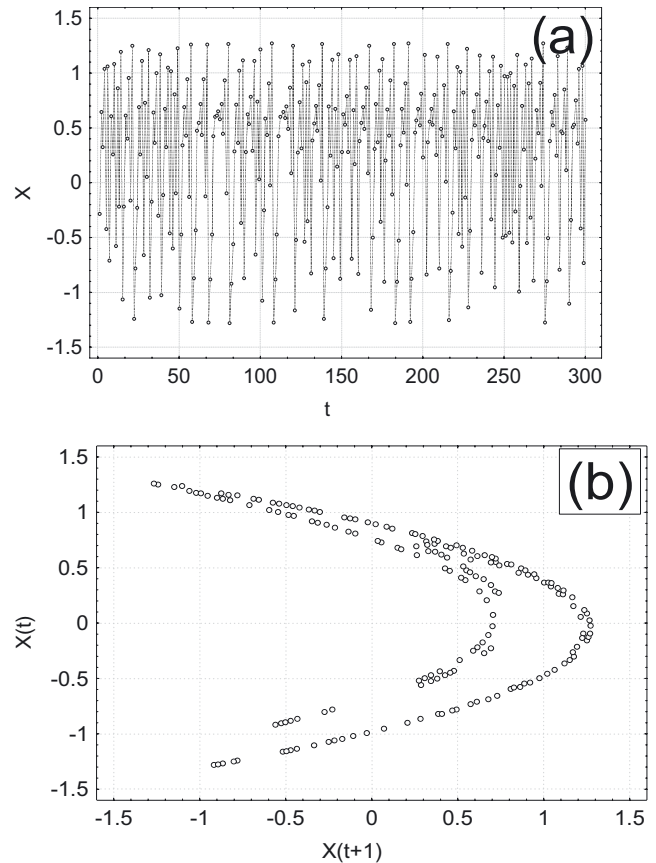


Fig. 13. Diagramme temporel de l'évolution de la coordonnée x de l'attracteur de Hénon en fonction du temps t et sa reconstruction par la méthode de retard.

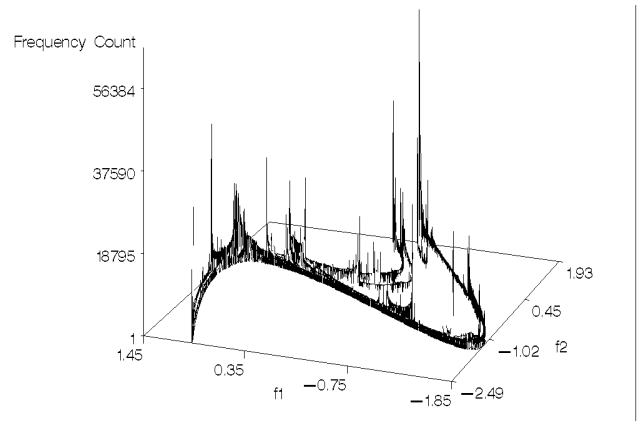


Fig. 14. Densité de probabilité empirique de l'attracteur de Hénon projeté orthogonalement sur un espace de deux dimensions.

entre les points $y(n_i)$ et $y(n_i + 1)$ rend délicat une analyse visuelle. Pour éviter cette corrélation, l'attracteur projeté sur un plan (Fig. 16a) nous apparaît comme un cercle pour la sinusoïde, prouvant ainsi l'aspect non fractal du profil initial. L'attracteur possède une trajectoire unique : il n'y a pas présence de chaos dans le signal. En observant la projection entre le deuxième et le

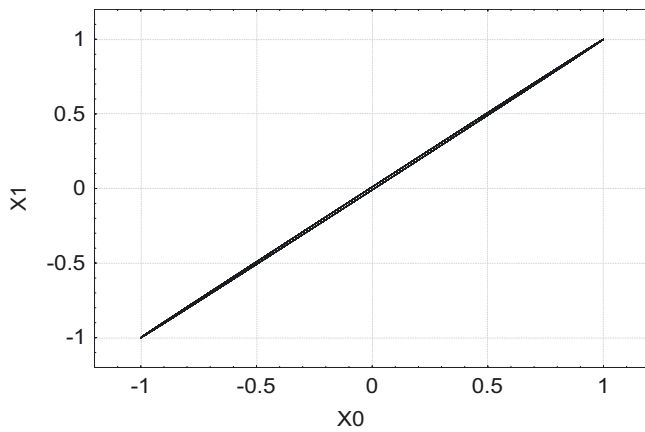


Fig. 15. Construction de l'attracteur de la sinusoïde par la méthode classique des retards.

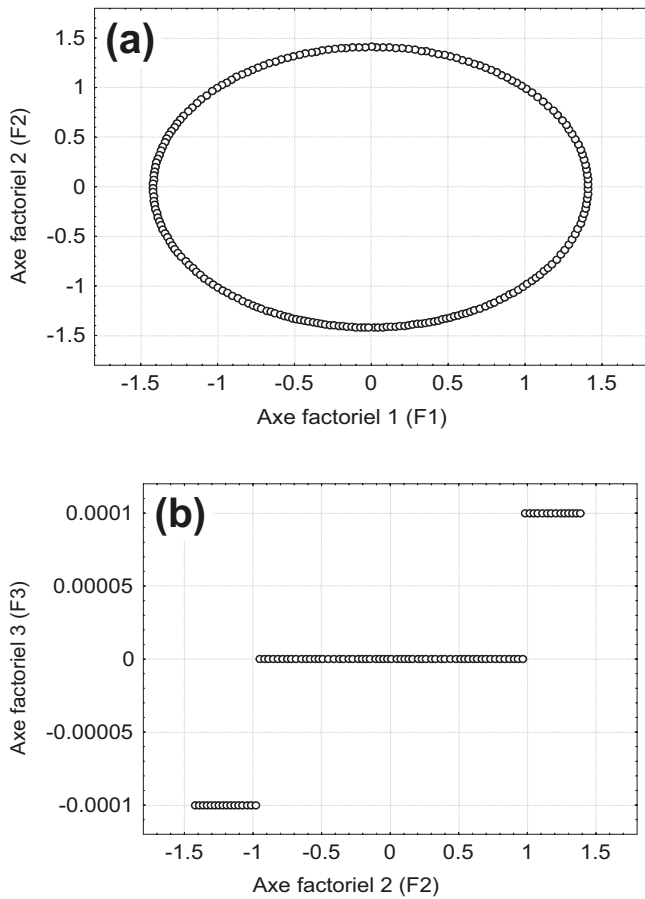


Fig. 16. Construction de l'attracteur de la sinusoïde par notre méthode de projection sur les 2 premiers axes orthogonaux F1–F2 (a) et les 2 axes F2–F3 (b).

troisième axe (Fig. 16b) nous constatons que l'attracteur est alors quasiment limité à une droite horizontale parallèle à l'axe 2 ; l'axe 3 semble ne plus contenir d'information. Pour mieux appréhender ce résultat, il est nécessaire d'introduire un théorème fondamental de la projection du nuage de points. Soit F_k un sous-espace portant l'inertie maximale, alors le sous-espace de dimension $k+1$ portant

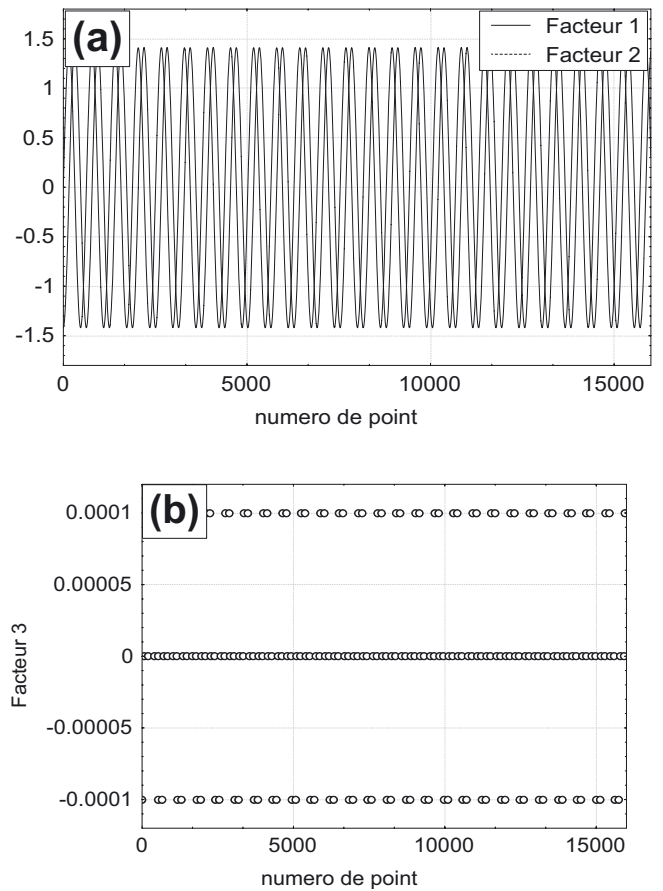


Fig. 17. Reconstruction de la sinusoïde par notre méthode de projection sur les 2 premiers axes orthogonaux F1 et F2 (a) et l'axe F3 (b).

l'inertie maximale est la somme directe de F_k et du sous-espace de dimension 1 orthogonal à F_k portant l'inertie maximale. F_k est construit de proche en proche en cherchant d'abord le sous-espace de dimension 1 d'inertie maximale, puis le sous-espace de dimension 1 orthogonal au précédent d'inertie maximale et ainsi de suite... Analysons l'attracteur de la sinusoïde : si ce dernier est un cercle, alors sa dimension fractale est de 1, et deux dimensions suffisent à caractériser l'attracteur. Pour confirmer cette analyse, il est possible de reconstruire la série à partir de chaque projection. La figure 17a permet la reconstruction de la sinusoïde à partir des deux premiers axes, alors que le troisième axe (Fig. 17b) ne contient quasiment aucune information (amplitude très faible). Ces variations n'ont pour origine que le bruit de calcul numérique dû à l'évaluation de valeurs et vecteurs propres nécessaires à la projection.

4.5.2 Analyse d'un bruit

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude d'un bruit blanc. Ce point est important pour notre caractérisation future. En effet toute donnée expérimentale

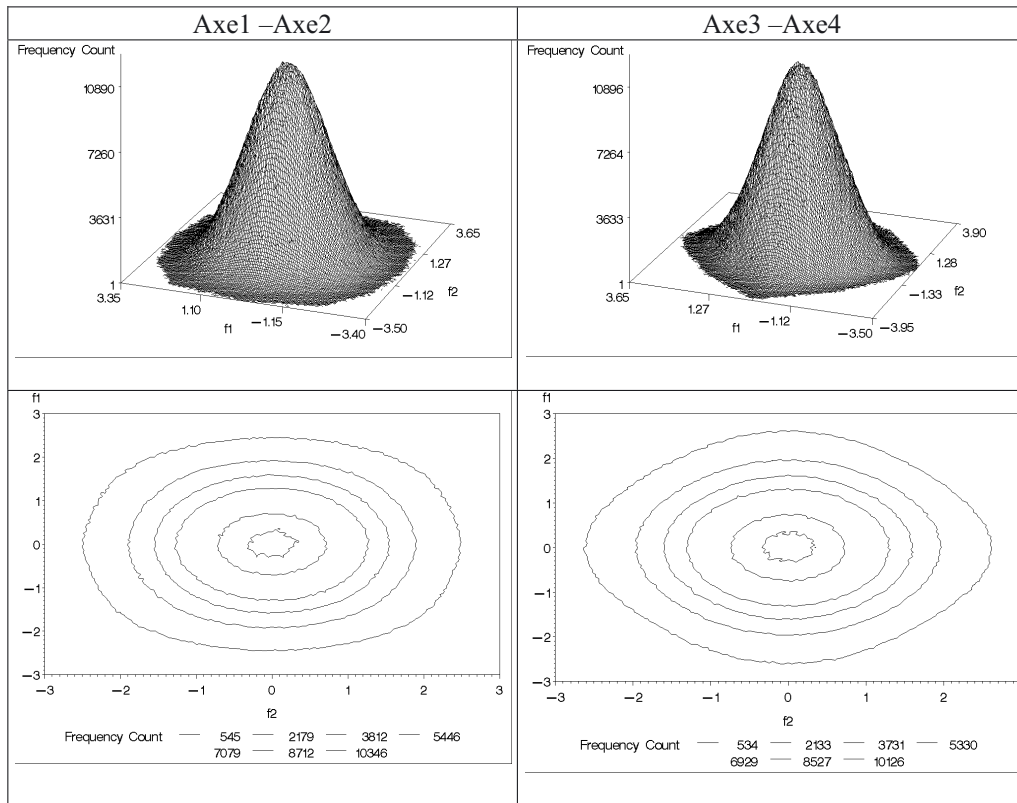


Fig. 18. Densités de probabilité empiriques et les surfaces de réponse de l'attracteur d'un bruit blanc projeté orthogonalement sur un espace de 2 dimensions selon les axes 1–2, puis les axes 3–4.

est entachée d'un bruit qu'il demeure important de quantifier. Le bruit blanc non corrélé se prête très mal à l'analyse par la théorie du chaos car il est délicat de séparer le bruit pur d'un « bruit » qui est la signature de l'apparition du chaos. Il est donc nécessaire de quantifier la signature du bruit par notre méthode d'analyse. Dans un premier temps analysons ce que donne l'attracteur reconstruit par la méthode des retards (delays). Comme un bruit blanc n'est pas autocorrélé (pour simplifier la suite, nous supposons le bruit borné entre 0 et 1), il n'existe aucune relation entre $y(n_i)$ et $y(n_i + p)$, $p \neq 0$, $\forall i$. De ce fait, l'attracteur présentera des points répartis uniformément dans un carré de $[0,1] \times [0,1]$ et apparaîtra, comme un plan de dimension fractale 2 pour un nombre de points suffisamment important. Par un raisonnement analogue, si nous nous intéressons à un volume (attracteur construit par les trois coordonnées $y(n_i)$, $y(n_i + 1)$ et $y(n_i + 2)$), l'attracteur sera alors construit par une multitude de points uniformément répartis dans le volume $[0,1]^3$ de dimension fractale 3. En étendant ce résultat, l'attracteur étudié en dimension n aura une dimension fractale de n . Il est intéressant d'analyser ce que devient ce bruit lorsque ce dernier est projeté par notre méthode.

Théorème : soit $\mathbf{y}(p)$ le vecteur des retards de dimension p . Soit $P(\mathbf{y}, p')$ l'opérateur de projection orthogonale par maximisation de l'inertie du nuage projeté sur l'espace de dimension p' , $p' \leq p$. Soit $G(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ la projection orthogonale de $\mathbf{a}$ sur le plan défini par les deux

vecteurs de base $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $i \neq j \leq \dim \mathbf{a}$. Soit $\Psi_{i,j}(n, p, p')$ l'ensemble des points défini par :

$$\Psi_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j}(n, p, p') = \{G(P(\mathbf{y}_1(p), p'), \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), G(P(\mathbf{y}_2(p), p'), \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \dots, G(P(\mathbf{y}_n(p), p'), \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\} \quad (6)$$

Soit $\Gamma(\Psi_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j}(n, p, p'))$ la densité de probabilité des points construite sur $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Si $\mathbf{y}(p)$ est un vecteur aléatoire qui suit une densité de probabilité uniforme entre 0 et $\mathbf{a}$ alors :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} \Gamma(\Psi_{(x,0),(0,y)}(n, p, p')) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} \quad (7)$$

Ce théorème fondamental que nous avons établi signifie que l'histogramme de la projection des vecteurs de retard d'un bruit blanc sur un sous-espace de dimension 2 (en maximisant l'inertie du nuage projeté) présente l'allure d'une gaussienne bidimensionnelle non corrélée quand la taille du sous-espace tend vers l'infini.

Ce théorème ne précise en rien la vitesse de convergence avec la dimension du sous-espace sur lequel le nuage est projeté. Cependant, nous avons montré que la vitesse de convergence est la même que celle de la somme de n variables aléatoires uniformes de même loi. Nous avons illustré ce propos par une simulation obtenue par la projection de 50 000 000 vecteurs délais sur un sous-espace de dimension 2 à 4 (Fig. 18).

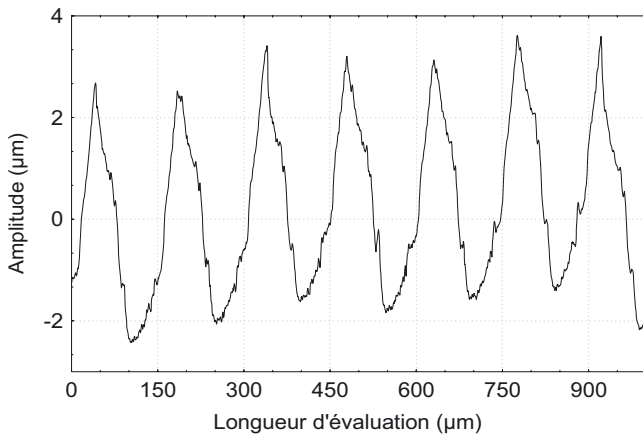


Fig. 19. Agrandissement d'un profil de rugosité d'une surface usinée.

4.5.3 Analyse d'une sinusoïde bruitée

Le bruit occupe une infinité de dimensions dans l'espace des phases et il peut devenir délicat de trouver la véritable dimension d'un attracteur quand celui-ci est construit par une série temporelle sur laquelle un bruit est additionné. Il est donc primordial de différencier le bruit intrinsèque du signal du bruit dit chaotique, caractéristique de la dynamique non linéaire du système étudié. Nous allons donc simuler des profils similaires aux profils expérimentaux – dont un zoom est montré en figure 19 – et ajouter un bruit blanc avec différentes amplitudes afin d'analyser l'effet sur la reconstruction de l'attracteur. La figure 20 représente l'attracteur projeté sur les deux premiers axes en fonction de l'amplitude du bruit ajouté. Nous pouvons aboutir aux conclusions suivantes :

- Quand le bruit diminue, l'attracteur tend vers une courbe de dimension fractale 1. Le signal devient déterministe et périodique et la description de l'attracteur est curviligne.
- L'allure de l'histogramme n'est pas fondamentalement modifiée quand le bruit augmente : l'orientation des deux premiers axes semble donc indépendante du bruit de mesure. Ce fait est crucial : en effet si tel n'était pas le cas, l'attracteur du mécanisme physique projeté ne pourrait pas être visualisé et toute interprétation voire même toute mesure construite sur ce dernier serait biaisée par le bruit. Ce résultat montre la robustesse de notre méthode originale de visualisation de l'attracteur qui permet de voir dans deux dimensions adéquates les propriétés de la dynamique du système ayant engendré la surface usinée.
- Si nous visualisons (figure non présente) l'attracteur sur les axes plus élevés, nous retrouvons la gaussienne décrite précédemment caractéristique du bruit. Ceci montre que l'attracteur peut être caractérisé uniquement par les deux premiers axes, c'est-à-dire en dimension 2. Notre méthode permet sur cet exemple de déterminer la dimension où la dynamique doit être observée en ayant ôté l'influence du bruit qui, comme

nous l'avons vu, ne permet pas de déterminer la dimension de l'attracteur.

- Le maximum est toujours situé à la même position quelle que soit l'intensité du bruit. Cette position semble donc caractéristique de la forme du signal sans présence de bruit.
- L'histogramme est symétrique par rapport à une droite parallèle au premier axe et passant par l'abscisse zéro du deuxième axe. Ce dernier porte donc la dynamique du profil indépendamment de son amplitude.

4.6 Analyse des profils issus des surfaces usinées

Les profils expérimentaux des surfaces usinées à différentes vitesses de coupe sont analysés suivant la démarche décrite ci-dessus. Néanmoins, alors que précédemment le signal était unique, nous disposons ici de plusieurs mesures (30) de surfaces prises dans les mêmes conditions de coupe ce qui nous permet d'effectuer les projections orthogonales pour chaque profil et d'obtenir un attracteur par profil. Pour ceux qui représentent les mêmes conditions d'usinage (les mêmes vitesses de coupe) nous estimons l'histogramme de l'attracteur global en superposant tous les attracteurs de chaque profil pour construire l'histogramme de l'attracteur. Nous avons tracé les attracteurs projetés sur les deux premiers axes pour les profils relatifs aux dix vitesses de coupe étudiées (Fig. 21). Nous constatons que :

- 1) L'orientation des histogrammes présente une certaine logique, ce qui supposerait que la projection de l'attracteur initial sur les axes principaux s'effectue sur un sous-espace vectoriel dont les vecteurs propres (qui forment une base dans le nouveau repère) sont identiques, ce qui permet de comparer la forme des histogrammes sans risque de déformations biaisées par les données elles-mêmes. Pour vérifier mathématiquement ce fait nous allons analyser les coordonnées du vecteur du premier axe dans l'ancienne base (base de l'attracteur originel). La figure 22 représente l'évolution des coordonnées de ce vecteur dans l'ancienne base en fonction de la vitesse de coupe. L'analyse statistique montre une très faible dépendance des coordonnées de ce vecteur vis-à-vis de la vitesse de coupe ce qui implique la pertinence de l'analyse de l'attracteur par notre méthode de projection qui est effectuée quasiment dans le même sous-espace vectoriel. Nous pouvons donc admettre que les valeurs de ces coordonnées sont constantes : $x_0 = x_1 = 0,50015 \pm 0,00025 \approx 0,5$, ce qui signifie qu'un point de l'attracteur (x'_0, x'_1) se projette sur le premier axe dont les coordonnées sont $(0,5x'_0, 0,5x'_1)$. Si nous supposons que le mécanisme chaotique est supporté par deux axes (dimension $D = 2$, nous le démontrerons dans le paragraphe suivant), alors le mécanisme chaotique est régi par :

$$\begin{aligned} \partial x_0(t)/\partial t = & \alpha_0 M_0 (\mathbf{A}_0, x'_0(t), x'_1(t)) \\ & + \beta M_1 (\mathbf{A}_1, x'_0(t), x'_1(t)) \quad (8) \end{aligned}$$

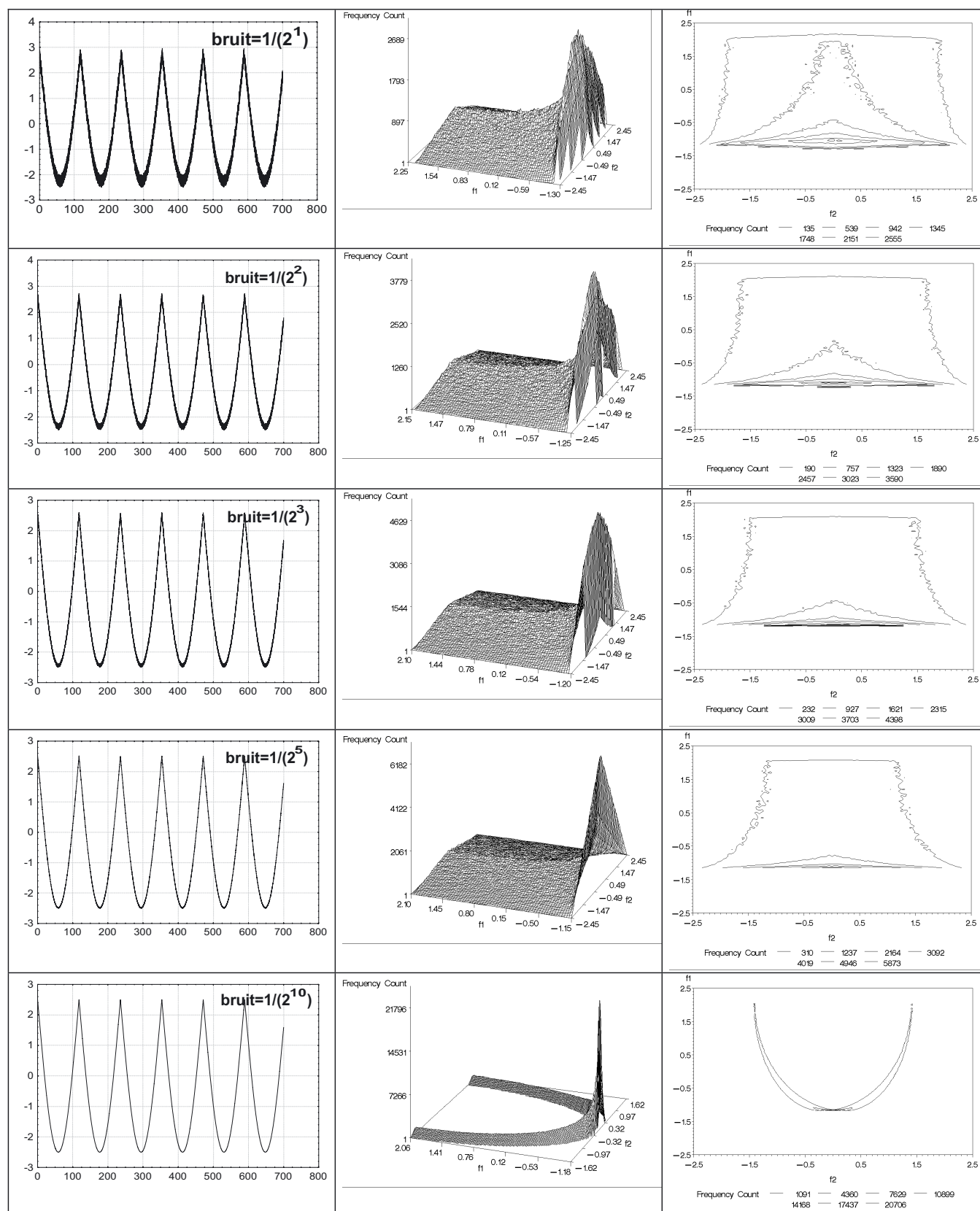


Fig. 20. Profil simulant le profil expérimental de la figure 19 avec addition d'un bruit blanc à différentes amplitudes, la densité de probabilité empirique et la surface de réponse de leurs attracteurs projetée orthogonalement sur un espace de 2 dimensions selon les axes 1–2.

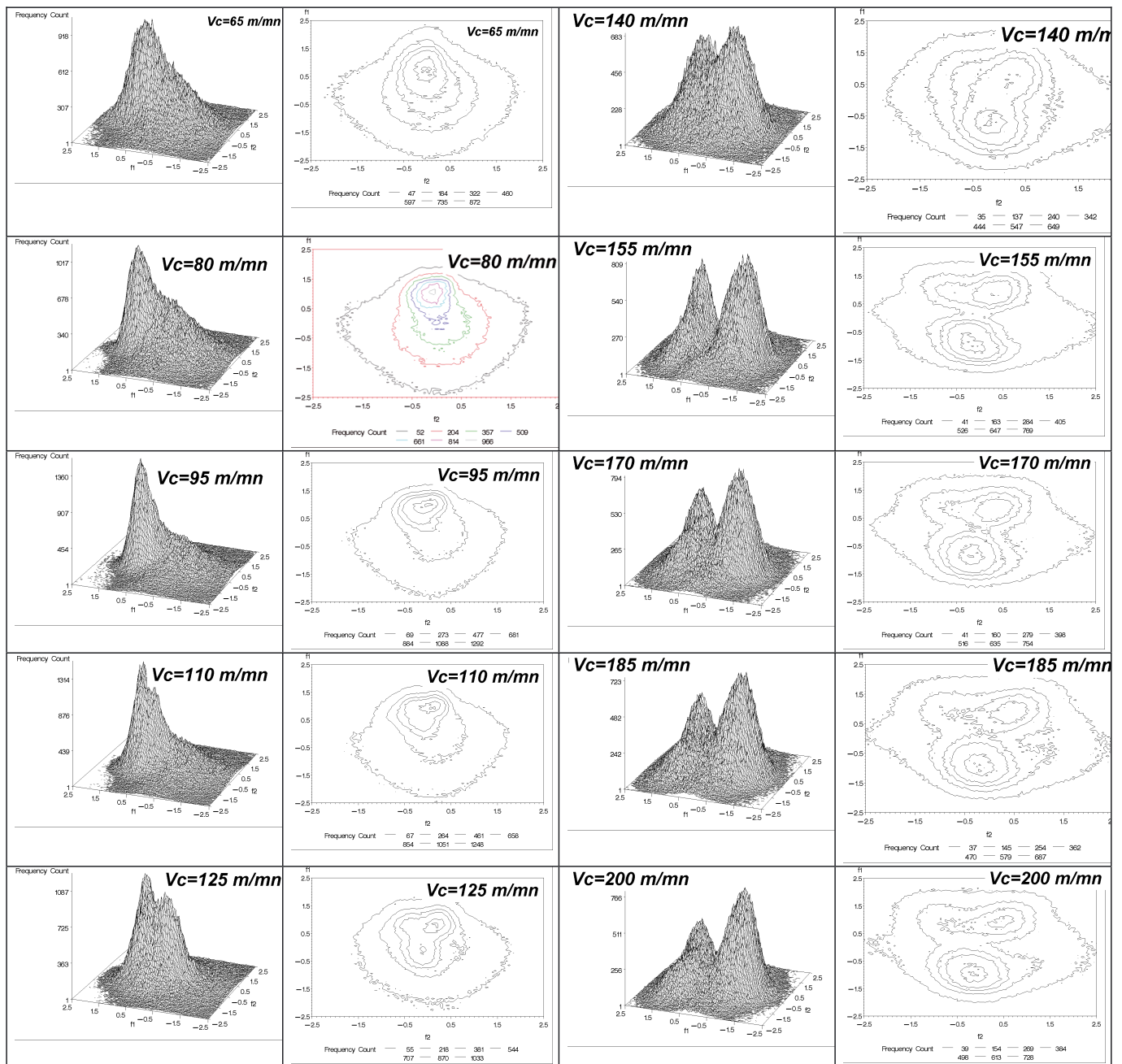


Fig. 21. Densité de probabilité empirique et surface de réponse des attracteurs projetées orthogonalement sur un espace de 2 dimensions selon les axes 1–2 des profils de surfaces usinées (cf. Fig. 1) obtenus à différentes vitesses de coupe.

ce qui signifie que le premier axe contient les deux mécanismes M_0 et M_1 qui modélisent le système dynamique.

- 2) Les histogrammes ne ressemblent en rien à ceux obtenus par l'analyse du signal qui modélise l'usinage sur lequel nous avons ajouté un bruit (voir paragraphe précédent). Ceci semble montrer que la surface mesurée n'est pas simplement une surface usinée parfaitement sur laquelle nous avons ajouté un bruit quelconque. Le bruit visible sur les profils de la figure 1

n'est pas un bruit blanc dont l'amplitude décroît avec la vitesse de coupe, mais possède une autre signature qui influence la forme macroscopique des surfaces.

- 3) L'histogramme qui est unimodal pour les faibles vitesses de coupe, devient bimodal quand la vitesse de coupe croît. La droite perpendiculaire au premier axe et passant par le point origine $x_0 = 0$ départage les deux modes de l'histogramme. Il est important de noter que ce point est la projection du centre de gravité de l'attracteur d'origine. En effet, trouver le

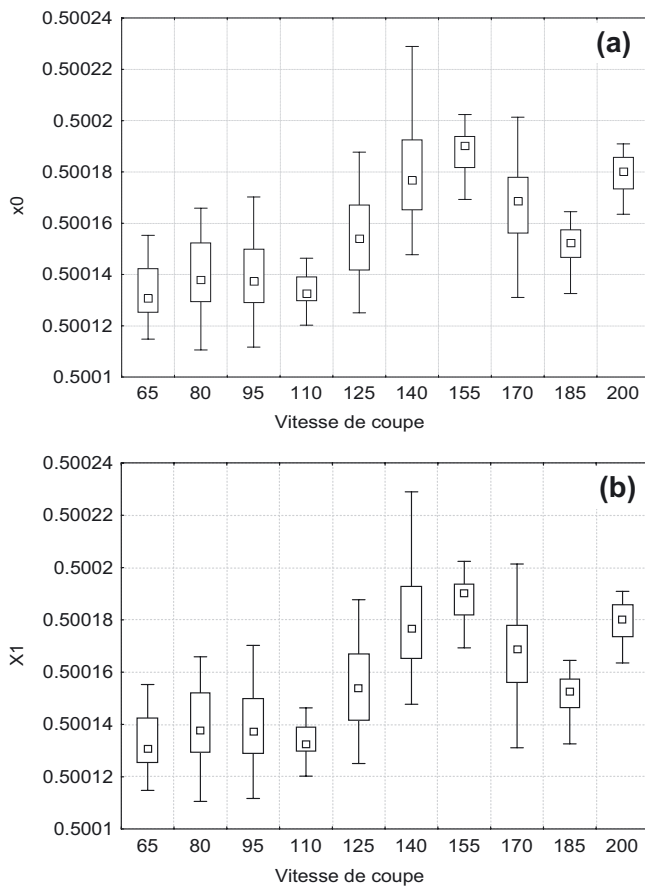


Fig. 22. Coefficient de la première dimension (a) et de la deuxième dimension (b) de l'attracteur projeté sur le premier axe, en fonction de la vitesse de coupe.

centre de gravité en $x_0 = 0$ fait que ce point est celui sur lequel pivote l'axe factoriel 1 quand on cherche à maximiser l'inertie du nuage projeté. Cette position possède donc un sens physique : elle est le centre d'inertie des points et donc tout sous-ensemble de points s'écartant de cette position s'écarte de la position d'équilibre. Comment interpréter alors le fait que l'histogramme commence progressivement à présenter deux modes quand la vitesse de coupe croît ? Dans un premier temps, nous allons représenter la répartition des points projetés sur le premier axe en fonction de la vitesse de coupe (Fig. 23). Quand celle-là est inférieure à 125 m.min⁻¹, l'attracteur donne une densité unimodale impliquant que le système dynamique converge vers un point fixe. Alors que la notion de point fixe est plutôt applicable au chaos déterministe, des fluctuations statistiques font que dans notre cas ce point appartient à une zone de l'espace des phases avec une probabilité donnée. Le point fixe peut alors être considéré comme la valeur du mode. Ceci signifie que le système retourne toujours vers un état d'équilibre : il n'est pas instable. Une perturbation sur ce système (hétérogénéité de la vitesse de coupe, du matériau) ne changera pas ce régime. Nous pouvons admettre que les deux mécanismes M_0 et M_1 sont

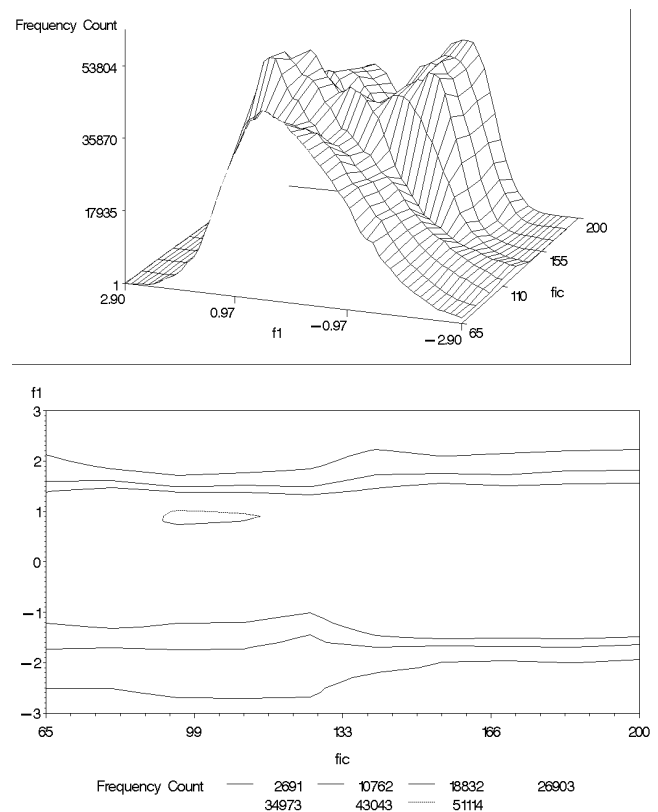


Fig. 23. Densité de probabilité et surface de réponse du diagramme de Feigenbaum du signal reconstruit par projection de l'attracteur sur le premier axe en fonction de la vitesse de coupe.

intimement liés, aucun ne domine l'autre au cours du temps : le système dynamique est stable. À partir de $V = 125$ m.min⁻¹, la valeur de $x'(t)$ n'est plus unique : l'attracteur atteint une bifurcation. Le système oscille entre $x'_a(t)$ et $x'_b(t)$: le système devient instable mais ne prend qu'un des deux états au cours du temps ; il est impossible de prévoir précisément quel sera l'état à l'instant t . Le système évolue de l'état A à l'état B puis A puis B etc. On peut admettre l'alternance des deux mécanismes M_0 et M_1 au cours du temps.

Nous allons maintenant vérifier que l'attracteur peut être caractérisé dans un espace de dimension deux, c'est-à-dire que seuls les mécanismes M_0 et M_1 décrivent la dynamique de l'usinabilité. Nous allons d'abord regarder la qualité de la projection sur chaque axe qui caractérise l'attracteur. Pour cela, nous calculons l'inertie du nuage de points projeté, c'est-à-dire la moyenne pondérée des carrés des distances des points au centre de gravité. Plus ce chiffre est élevé, et plus la signification de l'axe est pertinente. La figure 24 représente la valeur de l'inertie projetée sur chaque axe pour l'attracteur de dimension 10. Le premier axe porte une inertie très forte, (plus de 99,9 % de l'inertie du nuage initial) ce qui signifie qu'il contient une information primordiale et donc corrobore la conclusion concernant l'étude du premier axe. D'après ce graphique,

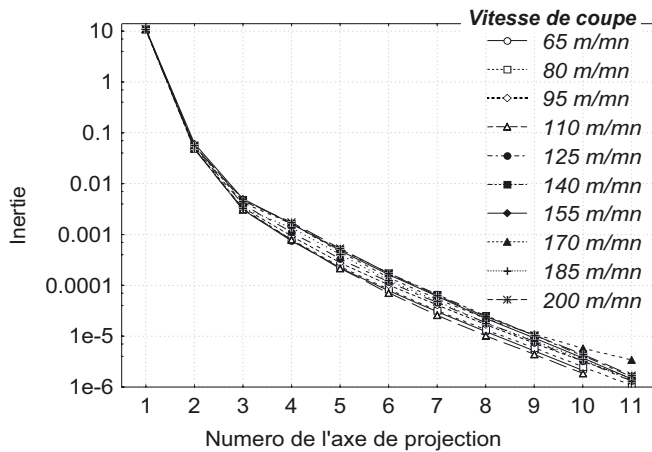


Fig. 24. Inertie du nuage projeté de l'attracteur sur l'axe orthogonal pour des profils usinés à différentes vitesses de coupe.

le deuxième axe semble contenir une information car le point apparaît « plus haut » que les points précédents. Cependant cette information n'est que subjective, même si elle semble confirmée par la figure 21. Nous pouvons observer que pour les vitesses de coupe élevées, les deux modes sont décalés par rapport au deuxième axe qui contient donc une information sur les mécanismes M_0 et M_1 au contraire des axes 3 à 10. Pour s'en assurer, l'histogramme des troisièmes et quatrièmes axes est tracé (Fig. 25) pour trois vitesses de coupe. Les histogrammes ne présentent pas de différences (nous travaillons sur la construction d'un test statistique pour vérifier cette assertion) et ne contiennent donc pas d'information sur la relation entre vitesse de coupe et usinabilité du matériau. Ces histogrammes ressemblent à ceux de la simulation d'un bruit (Fig. 18), c'est-à-dire d'un système exempt d'information. Il apparaît donc que les dimensions supérieures à 2 ne contiennent plus d'information (l'attracteur est de dimension 2) et l'usinabilité ne dépend que des deux processus dynamiques notés M_0 et M_1 .

Pour analyser comment les axes « perçoivent » le signal nous allons reconstruire le signal vu par chaque axe. En effet, chaque axe contient les coordonnées des points projetés initiaux qui sont donc eux-mêmes indexés sur la distance d'évaluation du profil originel. La figure 26 représente le signal reconstruit sur les quatre premiers axes pour trois vitesses de coupe. Visiblement, il apparaît que les profils sont différents uniquement pour les deux premiers axes, tandis qu'ils ressemblent à un bruit blanc sur les axes 3 et 4. Le premier axe contient l'information sur la forme macroscopique du profil usiné (ceci n'est pas un filtrage!) alors que le deuxième axe semble contenir une information sur le bruit d'usinage ou plus précisément sur la microrugosité. Pour vérifier cette hypothèse, nous allons calculer la dimension fractale des profils projetés par une méthode originale développée par les auteurs [18]. Cette méthode permet d'approcher plus précisément les dimensions fractales élevées qui sont généralement sous-évaluées. La figure 27 représente

l'évolution en fonction de la vitesse de coupe de la dimension fractale du profil projeté sur les 5 premiers axes. Nous constatons :

- Sur l'axe 1, la dimension fractale ne dépend pas de la vitesse de coupe et est voisine de 1. Pour pouvoir interpréter plus aisément ce résultat nous avons calculé la dimension fractale des profils originaux (Fig. 28) et constatons que la dimension fractale présente une augmentation (faible, mais statistiquement significative) à la transition entre les mécanismes 1 et 2. La dimension fractale sur l'axe 1, constante et proche de 1, signifie que le profil est vu comme euclidien (c'est-à-dire non-fractal). En quelque sorte, la projection sur l'axe 1 a « défractalisé » le profil. Le bruit d'usinage est supprimé et il ne reste que les conséquences de ce bruit sur la forme macroscopique du profil. Ceci est vrai quelle que soit la vitesse de coupe : la dimension constante prouve que notre méthodologie est robuste. En effet, nous analysons le profil dans la même dimension (euclidienne) indépendamment de l'allure du profil usiné. Notre méthode de projection a donc permis d'isoler une caractéristique propre à l'usinage.
- Analysons maintenant les résultats obtenus sur le deuxième axe. La dimension fractale, plus élevée que sur le premier axe, est largement supérieure à 1. Nous pouvons affirmer que le profil reconstruit sur cet axe est de dimension variant de 1,5 à 1,6 ce qui montre que l'axe 2 contient une information sur un processus fractal, c'est-à-dire à l'échelle microscopique. Cette dimension inférieure à 2 signifie clairement que nous ne sommes pas en présence d'un bruit non-corrélé (blanc ou rose par exemple). Les points des profils reconstruits sur l'axe 2 ont donc une structure entre eux. La dimension croît linéairement avec la vitesse de 1,5 à 1,6 (cette corrélation est statistiquement hautement significative) et la topographie microscopique caractérisée par les profils projetés sur l'axe 2 croît avec la vitesse de coupe ce qui est cohérent avec les faits et interprétations obtenus précédemment. Quand la vitesse de coupe augmente, le système dynamique oscille entre deux états de mieux en mieux définis. Cette alternance entre ces deux mécanismes (changement d'états de plus en plus marqués) fait que le profil devient de plus en plus tortueux. Ces changements d'états ont pour conséquence d'augmenter la dimension fractale du profil. Il serait tentant d'interpréter ce résultat par analogie avec le mouvement brownien fractionnaire. À vitesse faible, la dimension fractale est de 1,5, il n'y a pas corrélation spatiale et l'amplitude d'un point du profil n'est pas corrélée à la fois avec l'amplitude des points amont et aval. En un sens, il n'y a pas de mémoire de la forme. Quand la vitesse de coupe augmente, la dimension fractale augmente et le profil devient antipersistant, c'est-à-dire que les amplitudes des points aval et amont ont tendance à se corrélérer négativement. Cette antipersistence renforce de nouveau notre analyse qui affirme que lorsque la vitesse de coupe croît, deux mécanismes concurrentiels sont en opposition créant ainsi une antipersistence du

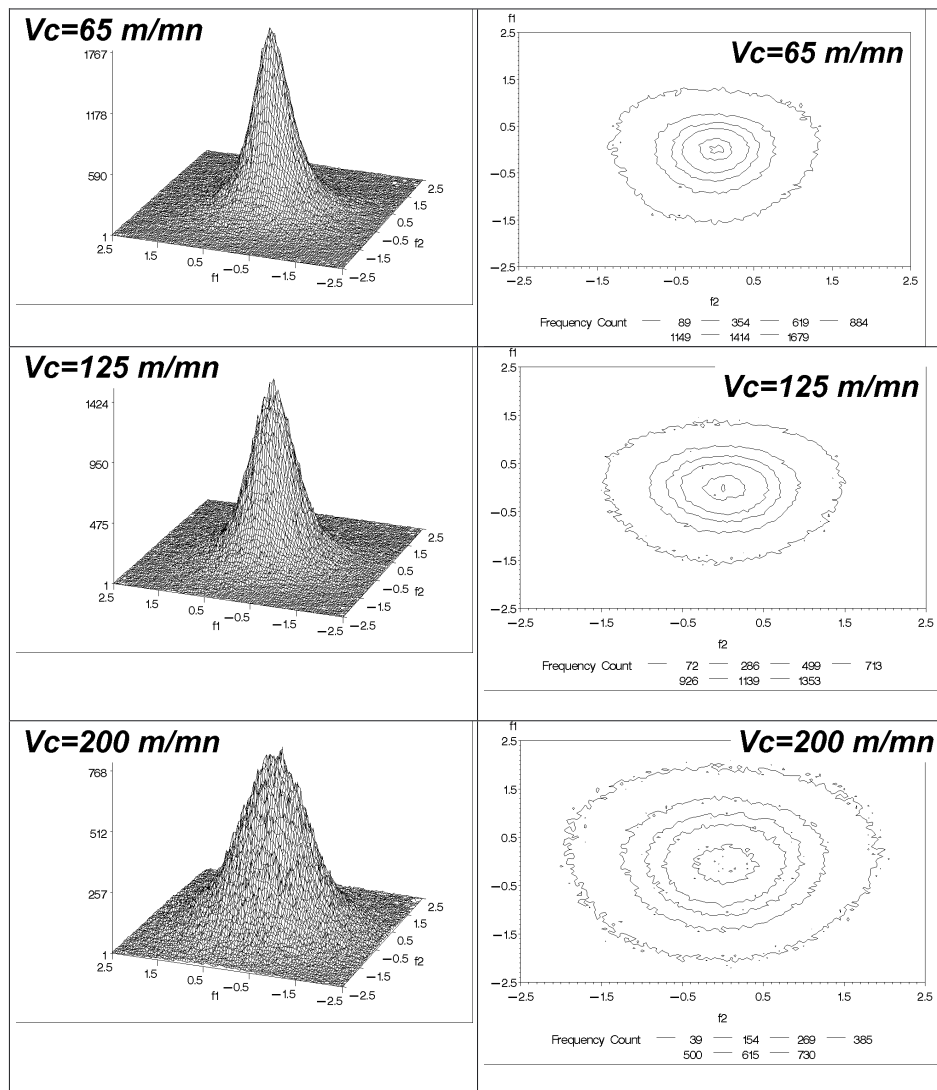


Fig. 25. Densité de probabilité empirique et surface de réponse des attracteurs projetées orthogonalement sur un espace de 2 dimensions selon les axes 3–4 des profils de surfaces usinées (cf. Fig. 1) obtenues à différentes vitesses de coupe.

profil projeté. L'axe 2 contient donc l'information sur la cinétique chaotique engendrée par l'usinage lorsque la vitesse croît.

- Les axes 3, 4 et 5 ont une dimension fractale, constante avec la vitesse de coupe, qui tend vers 2 (2 n'est pas atteint car mesurer le profil avec un rugosimètre tactile a pour effet de le lisser par offset, baissant ainsi la dimension fractale). Nous tendons vers un bruit blanc, sans aucune information et donc non représentatif du système. Certes, il demeure toujours une légère information sur les axes 3 et 4 mais nous nous garderons de toute interprétation sur celle-ci. Ceci confirme que toute l'information est contenue sur les deux premiers axes et que la dimension de l'attracteur est bien de deux.

Notre méthodologie de projection a permis de fournir deux visions duales de l'usinabilité : une à l'échelle macroscopique caractérisée sur le premier axe et une à l'échelle microscopique caractérisée par le deuxième axe. Or si

nous regardons la figure 28 nous voyons que la dimension fractale calculée d'après les profils initiaux n'est pas un paramètre pertinent pour caractériser l'effet de la vitesse de coupe sur l'usinabilité (par opposition à la pente du profil). Ceci s'explique par le fait que nous mesurons la dimension fractale de deux types de rugosité : une macroscopique et l'autre microscopique et donc nous obtenons une dimension hybride. La projection sur deux axes a permis de scinder cette dimension en deux composantes dont la seconde permet de caractériser l'influence de la vitesse de coupe sur l'usinabilité. Cette approche originale est à poursuivre car elle peut ouvrir la porte à de nouvelles méthodes de caractérisation des surfaces et interfaces.

4.7 Interprétation des résultats

Nous allons maintenant tenter une interprétation physique des résultats de l'étude de l'usinabilité par la théorie

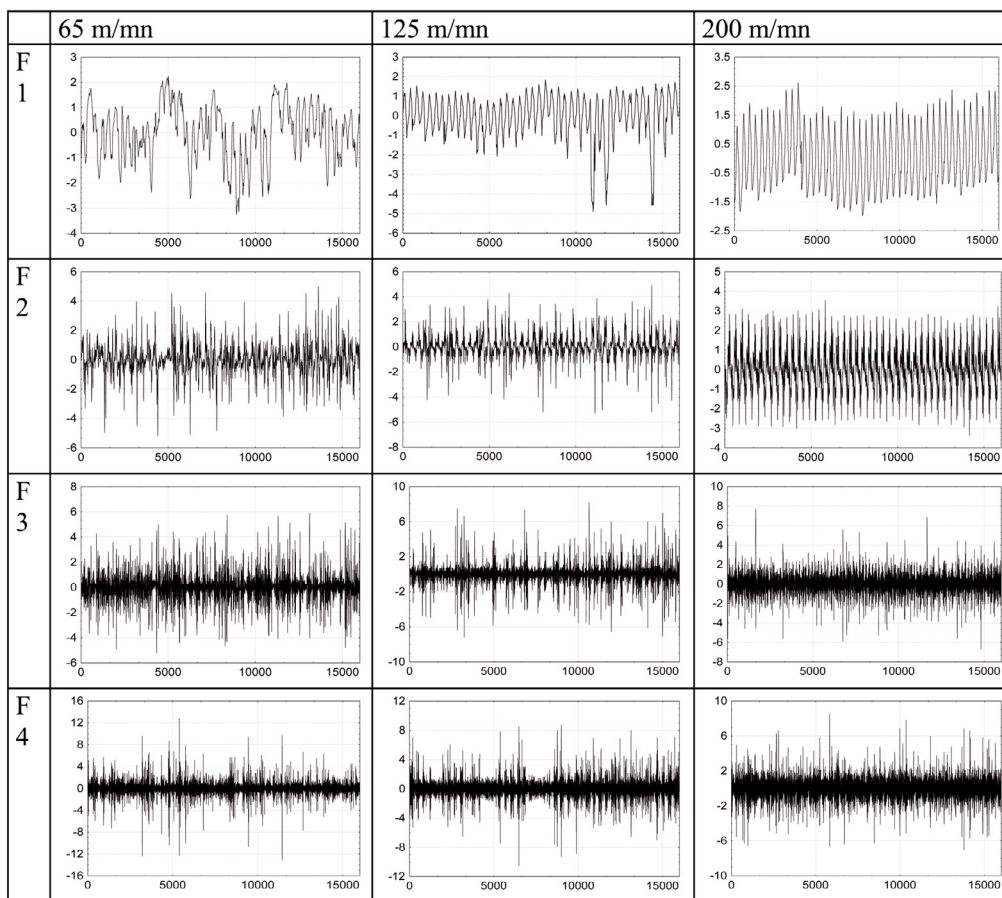


Fig. 26. Reconstruction des profils d'après les axes 1, 2, 3 et 4 à différentes vitesses de coupe.

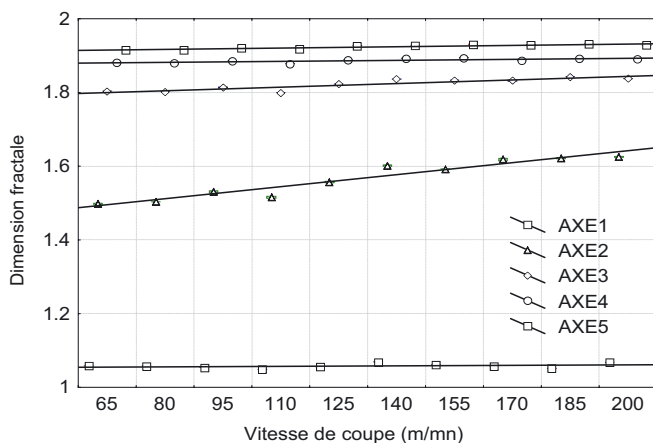


Fig. 27. Dimension fractale des profils reconstruits (cf. Fig. 26) d'après les axes 1, 2, 3, 4 et 5 en fonction de la vitesse de coupe.

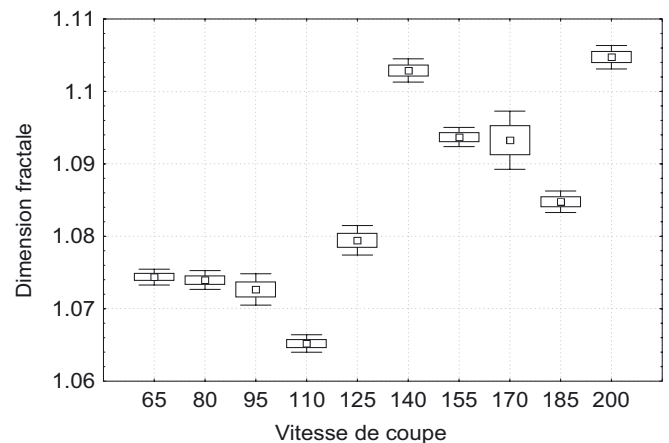


Fig. 28. Dimension fractale des profils des surfaces usinées (cf. Fig. 1) en fonction de la vitesse de coupe.

du chaos. Nous avons montré que la surface usinée découle de deux mécanismes physiques qui se confondent quand la vitesse de coupe est faible, mais s'alternent au fur et à mesure que la vitesse de coupe augmente, introduisant un comportement chaotique instable à deux niveaux. Il s'agit donc de trouver un mécanisme rencontré

en usinage qui puisse expliquer cela. À basse vitesse le mécanisme responsable de l'arrachement du copeau est gouverné par l'écrouissage généralisé. Quand la vitesse de coupe augmente, celle-ci se produit par cisaillement localisé. Cependant ce cisaillement localisé entraîne une augmentation très forte de température, susceptible d'induire des changements de phase. Quand la vitesse de coupe

augmente, le matériau est, en quelque sorte, vu comme étant plus dur. En effet, la loi de comportement en traction uniaxiale est :

$$\sigma = \sigma_0 + k\varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m \quad (9)$$

avec une contrainte de cisaillement $\tau = \sigma/\sqrt{3}$ et une déformation $\gamma = \varepsilon\sqrt{3}$. L'augmentation de la vitesse de coupe ainsi que de la contrainte de cisaillement, (et donc de la déformation associée) engendrent une augmentation de la température. Cette relation est donnée par la relation de Loewen et Shaw qui fournit la température de coupe dans le plan de cisaillement :

$$T - T_\infty = \frac{0,9}{1 + 1,328\sqrt{\frac{K_I \gamma}{V_f}}} \frac{\tau \gamma}{\rho C_p} \quad (10)$$

Cette augmentation de température a pour conséquence d'adoucir le métal. Pour résumer, à vitesse de coupe constante, la contrainte de cisaillement croît au cours de l'usinage (durcissement), ce qui engendre une augmentation de la température. Le matériau s'adoucit alors, réduisant ainsi la contrainte de cisaillement. Finalement, la température diminue jusqu'à revenir à la température initiale. Ceci constitue donc un cycle à deux états : durcissement/adoucissement. Si la vitesse de coupe augmente, ce cycle est toujours valide, mais plus marqué car la contrainte de cisaillement apparente ainsi que la température seront plus élevées. L'usinage est donc une succession de ces cycles qui engendre une modification de la topographie de la surface usinée, détectée par notre application de la théorie du chaos. Quand la vitesse de coupe devient de plus en plus faible, la coupe ne se produit que par écoulement généralisé, il y a production de chaleur par l'écrouissage mais les vitesses de coupe étant plus faibles, la coupe n'est plus un mécanisme adiabatique car la chaleur a alors le temps de se propager dans le matériau. Le système est à l'équilibre, ce qui se traduit par un point fixe sur notre attracteur. Recht [19] a développé un critère pour la transition entre ces deux mécanismes. La transition du mode de cisaillement (que Recht appelle instabilité, et qui est alors en accord avec notre interprétation par la théorie du chaos) se produit quand les effets de l'écrouissage du matériau sont équilibrés par les effets de l'adoucissement thermique (dans notre cas, $V_c = 125 \text{ m.min}^{-1}$), ce qui se met sous la forme

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} + \frac{\partial \tau}{\partial T} \frac{dT}{d\gamma} \quad (11)$$

$\frac{d\tau}{d\gamma}$ = effet écoulement + effet température.

Recht affirme donc que l'écrouissage responsable de la coupe du copeau peut se mettre sous forme d'une combinaison linéaire de deux mécanismes différentiels. C'est exactement ce que nous avons trouvé par notre théorie concernant la projection sur un axe.

Recht propose le critère suivant :

$$R = \frac{\frac{d\tau}{d\gamma}}{\frac{\partial \tau}{\partial T} \frac{dT}{d\gamma}} \quad (12)$$

Si $R = 1$ ($V_c = 125 \text{ m.min}^{-1}$), nous sommes dans le régime de transition, ce qui correspond dans notre cas à la vitesse de coupe associée à la première bifurcation dans le diagramme de Feigenbaum.

Si $R < 1$ ($V_c > 125 \text{ m.min}^{-1}$), zone de cisaillement localisé, nous sommes dans le régime chaotique à deux états.

Si $R > 1$, ($V_c < 125 \text{ m.min}^{-1}$), zone de cisaillement généralisé, état d'équilibre et points fixes dans l'attracteur.

5 Conclusion

Une méthode statistique originale nous a permis de montrer que l'usinabilité pouvait être caractérisée par des paramètres de rugosité conventionnels. Parmi une centaine de paramètres, le critère qui caractérise la pente moyenne des profils est le paramètre le plus discriminant. Ce paramètre permet de différencier les deux régimes de coupe : coupe due à l'écrouissage généralisé (faible vitesse, pentes des profils élevées) et la coupe due au cisaillement localisé (forte vitesse, pentes des profils faible). Ce critère permet également de quantifier l'effet de la vitesse pendant ces deux stades alors que le paramètre de rugosité R_a , le plus utilisé en analyse de surface de pièces usinées, ne le permet pas. Il est également montré que la mesure des paramètres de rugosité effectuée par un rugosimètre portable tactile (avec patin de référence) conduit aux mêmes conclusions. Il est alors possible d'appliquer directement le critère retenu in situ sur l'outil pour déterminer les paramètres du procédé (vitesse de coupe, type d'outil de coupe, profondeur de passe, avance, etc.) permettant l'obtention d'une surface bien usinée (diminution des contraintes internes, minimisation des défauts de formes, baisse de la puissance de coupe, augmentation de la durée de vie de l'outil, etc.). Cette étude sera reconduite sur un même matériau présentant des duretés différentes obtenues par traitement thermique afin d'analyser la robustesse statistique des paramètres de rugosité. Une étude sera également menée par mesure de la rugosité dans le sens de l'usinage, ce qui n'est pas une opération aisée car les stries ne sont pas linéaires mais incurvées. Un traitement mathématique de la surface mesurée doit être effectué pour redresser les stries (algorithme en cours d'écriture).

Nous avons ensuite montré que la théorie du chaos permettait de caractériser l'influence de la vitesse de coupe sur l'usinabilité. La transition écoulement généralisé/écrouissage localisé correspond à une bifurcation sur le diagramme de Feigenbaum construit d'après les profils mesurés sur un attracteur à deux dimensions. Il a été montré, grâce à la création d'une technique originale de projection, que les deux dimensions de l'attracteur caractérisent deux mécanismes physiques : l'écrouissage du matériau et l'effet de la température relative à la vitesse de coupe. La transition écoulement généralisé/écrouissage localisé est donc expliquée par l'apparition d'un régime chaotique à deux états mettant en évidence le conflit entre écoulement et cisaillement généralisé. Cette étude

sera étendue en usinage grande vitesse afin de rechercher d'autres bifurcations et nous subodorons que le mécanisme de broutage (vitesse élevée) serait dû à l'entrée dans le chaos généralisé caractérisé par le diagramme de Feigenbaum.

Nous avons volontairement exclu de cette publication tout calcul sur l'attracteur lui-même (spectre multifractal, exposants de Lyapunov...) et opté pour une interprétation plus visuelle de l'attracteur afin de fournir un outil graphique à l'usineur lors du réglage des conditions de coupe. Dans un prochain article, nous caractériserons cet attracteur afin de fournir une mesure quantitative de l'usinabilité par la théorie du chaos. De même l'étude morphologique et microstructurale du copeau formé sera reliée aux caractéristiques de l'attracteur que nous formulerons analytiquement par des fonctions relatives à l'érouissage et à l'effet thermique. Dans ce cadre, la question de l'opportunité d'utiliser un code standard de calcul (éléments-finis) pour modéliser la coupe se pose car celle-ci conduirait inéluctablement à un point fixe et ne pourrait introduire le comportement instable signe d'une bonne usinabilité. Au-delà, cette méthode doit encore être appliquée pour d'autres paramètres de coupe tels l'avance et la profondeur de passe pour être pleinement validée.

Remerciements. Ce travail est financé par la fondation CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques) sous le nom de Projet « Nouvelles méthodes d'analyse des états de surfaces : de la caractérisation à la recherche de paramètres pertinents ».

Références

- [1] M. Bigerelle, D. Najjar, A. Iost, Description d'une nouvelle méthode de corrélation entre la rugosité et une propriété de surface, application à la brillance de tôles skin-passées, *Revue de Métallurgie* 99 (2002) 467–479
- [2] M. Bigerelle, D. Najjar, A. Iost, Relevance of roughness parameters for description and modelling of machined surfaces, *J. Mater. Sci.* 38 (2003) 2525–2536
- [3] B. Efron, Bootstrap Methods: Another look at the Jackknife, *Ann. Statist.* 7 (1979) 1–26
- [4] B. Efron, R.J. Tibshirani, An introduction to the bootstrap, London, Chapman and Hall, 1993
- [5] P. Hall, The bootstrap and the edgeworth expansion, New York, Springer-Verlag, 1992
- [6] J. Shao, D. Tu, The jackknife and the bootstrap, New York, Springer-Verlag, 1996
- [7] M. Bigerelle, A. Iost, Statistical artefacts in the determination of the fractal dimension by the slit island method, *Engng. Fracture Mechanics* 71 (2004) 1081–1105
- [8] G. Poulachon, A.L. Moisan, M. Dessoly, Contribution à l'étude des mécanismes de coupe en tournage dur, *Mécanique & Industries* 3 (2002) 291–299
- [9] E. Charkaluk, M. Bigerelle, A. Iost, Fractals and fracture, *Engng. Fracture Mech.* 61 (1998) 119–139
- [10] J. Brewer, L. Di Girolamo, Limitations of fractal dimension estimation algorithms with implications for cloud studies, *Atm. Res.* 82 (2006) 433–454
- [11] S. Karube, W. Hoshino, T. Soutone, K. Sato, The non-linear phenomena in vibration cutting system. The establishment of dynamic model, *Int. J. Non-Lin. Mech.* 37 (2002) 541–564
- [12] R.F. Gans, When is cutting chaotic?, *J. Sound Vibration* 188 (1995) 75–83
- [13] M.S. Fofana, Sufficient condition for the stability of single and multiple regenerative chatter, *Chaos, Solitons & Fractals* 14 (2002) 335–347
- [14] M.S. Fofana, Effect of regenerative process on the sample stability of a multiple delay differential equation, *Chaos, Solitons & Fractals* 14 (2002) 301–309
- [15] H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, Chaos and fractals : New frontiers of science, New York, Springer-Verlag, 1992
- [16] D. Ruelle, Chaotic evolution and strange attractor, *Accademia Nazionale Dei Lincei, Cambridge University Press*, 1987
- [17] F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, *Dynamical systems and turbulence, Lectures notes in mathematics*, 898, Springer, New York, 1981
- [18] M. Bigerelle, A. Iost, Calcul de la dimension fractale d'un profil par la méthode des autocorrélations moyennées normées A.M.N, *C. R. Acad. Sci. Paris* 323 (1996) 669–675
- [19] F.F. Recht, catastrophic thermoplastic shear, *J. Appl. Phys.* 31 (1964) 189–193