

# Modélisation par éléments finis des vibrations non-linéaires des plaques sandwich viscoélastiques

EL MOSTAFA DAYA<sup>1,a</sup>, LAHCEN AZRAR<sup>2</sup> ET MICHEL POTIER-FERRY<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, UMR CNRS 7554, I.S.G.M.P., Université de Metz, Ile de Saulcy, 57045 Metz Cedex 01, France

<sup>2</sup> Faculté des Sciences et Techniques de Tanger, Université Abdelmalek Essaadi, BP 416, Tanger, Maroc

Reçu le 3 octobre 2002, accepté le 9 janvier 2004

**Résumé** – Dans cet article, nous présentons une méthodologie numérique pour l'analyse des vibrations non-linéaires des plaques sandwich constituées d'une couche viscoélastique intercalée entre deux parements élastiques. Les modèles de von Karman pour les couches élastiques et de Mindlin pour la couche viscoélastique ont été adoptés. Cette méthode est basée sur une discrétisation par éléments finis et la technique de la balance harmonique couplée à la méthode de Galerkin à un mode. Ainsi, les vibrations non-linéaires des plaques sandwich viscoélastiques ont été modélisées par une simple équation d'amplitude complexe, qui est obtenue par le calcul numérique de deux coefficients complexes. Le premier coefficient permet d'estimer l'amortissement et la fréquence dans le cas linéaire, tandis que le second rend compte des effets non-linéaires en grands déplacements. Les formulations de la pulsation et du facteur de perte en fonction de l'amplitude ont été données analytiquement. Pour valider ce modèle, le calcul numérique d'amortissement dans les cas linéaire et non-linéaire et les courbes de réponses pour différentes structures sandwich viscoélastiques (poutres, plaques) ont été présentés et favorablement comparés à des résultats de la littérature et de l'expérience.

**Mots clés** : Vibrations non-linéaires / éléments finis / balance harmonique / amortissement / plaque sandwich / viscoélasticité

**Abstract** – **Finite element modeling of non-linear vibrations of viscoelastic sandwich plates.** In this paper, a numerical modeling for non-linear vibration analyses of damped sandwich plates, in which a viscoelastic layer is sandwiched between two elastic ones, is developed. The von Karman model is used for elastic layers and Mindlin's for the viscoelastic core. This method is based on finite element technique and on harmonic balance method coupled with a one mode Galerkin procedure. By this way, the non-linear vibration analysis of viscoelastically damped sandwich plates is governed by a complex amplitude-frequency relationship involving numerical computation of two complex numbers. The first one permits to estimate the loss factor of the structure in the linear case. The second coefficient takes into account the non-linear effects due to the large displacements. The loss factor-amplitude and frequency-amplitude relationships are analytically formulated. In order to validate the present model, the numerical computation of the loss factor and the frequency-response curves are presented for some viscoelastically damped sandwich beams and plates and well compared with results of the experiment and of the literature.

**Key words**: Non-linear vibration / finite element / harmonic balance / damping / sandwich plate / viscoelasticity

## 1 Introduction

La réduction du bruit est l'une des préoccupations majeures des industries automobiles, navales, aéronautiques et des constructeurs d'appareils électroménagers. Pour

cela, il existe des tôles antivibratoires appelées tôles sandwich qui intègrent la fonction amortissante. Ces tôles sont constituées d'une mince couche de matériau viscoélastique intercalée entre deux parements d'acier (Fig. 1). La fonction amortissante de ces tôles est apportée par le matériau viscoélastique, ayant des caractéristiques mécaniques complexes et dépendant de la

<sup>a</sup> Auteur correspondant : daya@lpmm.univ-metz.fr

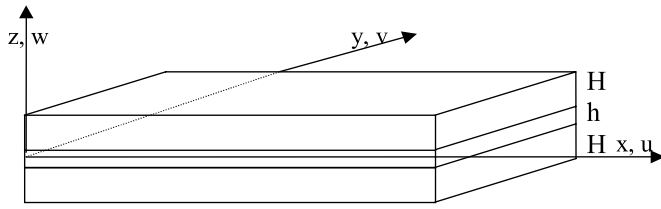


Fig. 1. Plaque sandwich.

fréquence des vibrations et de la température [1]. La prise en compte du cisaillement dans la couche centrale permet une bonne estimation de l'amortissement de la tôle sandwich. Ce cisaillement est dû à un écart entre les déplacements longitudinaux (dans le plan) des couches d'acier. Plusieurs méthodes analytiques et numériques ont été développées pour déterminer correctement les fréquences propres et l'amortissement des vibrations linéaires de ce genre de structures [2–18]. Par contre, peu de travaux ont été réalisés pour l'analyse des vibrations en grandes amplitudes des tôles sandwich [19, 20]. Récemment, une méthode analytique a été développée [21, 22] pour étudier les vibrations non-linéaires des poutres sandwich viscoélastiques. Ce formalisme, basé sur la méthode de Galerkin et la méthode de la balance harmonique, est simple et très efficace, particulièrement pour les structures de forme géométrique très simple avec des conditions aux limites simples.

L'objectif de ce travail est d'appliquer les idées développées dans [21, 22] en utilisant la méthode des éléments finis. Cela permettrait d'avoir une méthode numérique pour l'étude des vibrations non-linéaires des plaques sandwich viscoélastiques de forme quelconque en prenant en compte n'importe quel modèle viscoélastique.

## 2 Formulation du problème

Dans cette partie, nous présentons une formulation variationnelle du problème des vibrations non-linéaires des plaques sandwich, constituées de deux couches élastiques d'épaisseur identique  $H$  et d'une couche viscoélastique d'épaisseur  $h$  (Fig. 1).

### 2.1 Modèle cinématique

Pour définir les déplacements et les déformations de la plaque sandwich, on considère le modèle de Von Karman pour les deux couches d'acier et le modèle de Mindlin pour la couche interne, viscoélastique, pour mieux tenir compte du cisaillement. D'après, plusieurs travaux, par exemple [2–4], on suppose que les trois couches sont parfaitement collées entre elles, ont la même flèche

(déplacement transversal). Ainsi, les déplacements et les déformations dans les couches élastiques sont de la forme :

$$\begin{cases} U_i(x, y, z, t) = u_i(x, y, t) - (z - z_i) \frac{\partial w}{\partial x} \\ V_i(x, y, z, t) = v_i(x, y, t) - (z - z_i) \frac{\partial w}{\partial y} \\ W_i(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad i = 1, 3 \quad (1)$$

$$\{\varepsilon_i\} = \{\varepsilon_i^1\} + \{\gamma^{nl}\} + (z - z_i)\{K\} \quad (2)$$

$$\varepsilon_i^1 = \begin{Bmatrix} u_{i,x} \\ v_{i,y} \\ u_{i,y} + v_{i,x} \end{Bmatrix} \quad \gamma^{nl} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (w,x)^2 \\ (w,y)^2 \\ 2w,yw,x \end{Bmatrix} \quad K = \begin{Bmatrix} -w,xx \\ -w,yy \\ -2w,xy \end{Bmatrix}$$

où  $z_1 = (H + h)/2 = -z_3$ , l'indice 1, 3 désigne la couche supérieure, inférieure de la plaque.  $u_i(x, y, t)$ ,  $v_i(x, y, t)$  sont les déplacements de la surface moyenne de la face élastique  $i$ .  $\{\gamma^{nl}\}$  représente les déformations non-linéaires.

Les déplacements, les déformations dans le plan de la couche interne  $\varepsilon_2$  et les déformations de cisaillement  $\xi_2$  sont de la forme :

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\beta_x(x, y, t) \\ V(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\beta_y(x, y, t) \\ W(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\{\varepsilon_2\} = \{\varepsilon_2^1\} + \{\gamma^{nl}\} + z\{K_2\} \quad (4)$$

$$\varepsilon_2^1 = \begin{Bmatrix} u,x \\ v,y \\ u,y + v,x \end{Bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{Bmatrix} w,x - \beta_x \\ w,y - \beta_y \end{Bmatrix} \quad K_2 = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix}$$

où  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ ,  $\beta_x(x, y, t)$  et  $\beta_y(x, y, t)$  sont respectivement les déplacements et les rotations de la surface moyenne de la couche viscoélastique.

### 2.2 Lois de comportement

Nous considérons que le matériau des couches élastiques est linéaire, homogène et isotrope. En

négligeant les déformations de cisaillement, les lois de comportement de ces couches sont données par :

$$\{N_i\} = \begin{Bmatrix} N_{ixx} \\ N_{iyy} \\ N_{ixy} \end{Bmatrix} = [C_m] \{\varepsilon_2 + \gamma^{nl}\} \quad (5)$$

$$\{M_i\} = \begin{Bmatrix} M_{ixx} \\ M_{iyy} \\ M_{ixy} \end{Bmatrix} [C_f] \{K\} \quad (6)$$

où  $N_i$ ,  $M_i$  sont les vecteurs représentant les efforts normaux et les moments fléchissant et où  $C_m$ ,  $C_f$  sont respectivement la matrice de comportement en membrane et celle en flexion. Ces matrices sont rappelées en annexe.

En général, le comportement du matériau viscoélastique dépend de plusieurs paramètres (température, temps...). Ce type de comportement peut être caractérisé à partir des essais de relaxation et de fluage. Ainsi, les lois viscoélastiques s'écrivent à partir d'opérateurs de convolution :

$$\{N_2\} = [C_m^2(t)]^* \frac{\partial}{\partial t} \{\varepsilon_2 + \gamma^{nl}(w, w)\} \quad (7)$$

$$\{Q_2\} = \begin{Bmatrix} Q_{2x} \\ Q_{2y} \end{Bmatrix} = [C_{cis}^2(t)]^* \frac{\partial}{\partial t} \{\xi_2\} \quad (8)$$

$$\{M_2\} = [C_f^2(t)]^* \frac{\partial}{\partial t} \{K_2\} \quad (9)$$

$N_2$ ,  $Q_2$  et  $M_2$  sont des vecteurs représentant respectivement les efforts normaux, de cisaillement et les moments fléchissant dans la couche centrale.

Cependant, le comportement de ces matériaux soumis à des sollicitations harmoniques de pulsation  $\omega$ , est défini par un module d'Young complexe  $E_{vis}(\omega)$  et un coefficient de Poisson supposé constant et réel, lorsque le matériau est homogène, isotrope et non vieillissant [1–4]. Supposons par exemple que les déformations  $\xi_2$  sont des combinaisons d'harmoniques  $\omega_j$  :

$$\{\xi_2\} = \left\{ \sum_{j=1}^k \{\xi_2(j)\} e^{i\omega_j t} + CC \right\} \quad (10)$$

où  $CC$  dénote le complexe conjugué.

Dans ce cas la loi (8) s'écrit, composante par composante, à partir de modules complexes :

$$\{Q_2\} = \left\{ \sum_{j=1}^k \{Q_2(j)\} e^{i\omega_j t} + CC \right\} \quad (11)$$

$$\{Q_2(j)\} = [C_{cis}^{2*}(\omega_j)] \{\xi_2(j)\} \quad (12)$$

$$[C_{cis}^{2*}(\omega)] = i\omega \int_0^{+\infty} [C_{cis}^2(t)] e^{-i\omega t} dt \quad (13)$$

Les matrices de comportement  $[C_{cis}^{2*}(\omega)]$ ,  $[C_m^{2*}(\omega)]$ ,  $[C_f^{2*}(\omega)]$  dépendent de la fréquence des vibrations sont

données en annexe. Il faut noter que l'absence du coefficient correcteur dans  $[C_{cis}^{2*}(\omega)]$  (par exemple 5/6 selon Reissner) est dû au fait qu'ici le cisaillement dans la couche viscoélastique résulte principalement à l'écart des déplacements longitudinaux des faces élastiques d'une part [2, 3]. D'autre part, les faces de cette couche sont contraintes et le calcul du coefficient suppose des faces libres.

### 2.3 Équations du mouvement

En utilisant les conditions de raccord cinématique entre les trois couches, les déplacements dans les couches externes s'expriment en fonction des déplacements de la surface moyenne de la plaque, considérée comme surface de référence. Cela permet de travailler avec les seuls déplacements généralisés :  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ .

Ainsi, la variation de l'énergie de déformation de la plaque subissant des sollicitations harmoniques peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta V = 2 \int_S \left( {}^t\{N\} \{\delta\varepsilon_2\} + {}^t\{n\} \left\{ \varepsilon \left[ \frac{H}{2} \delta w_{,\alpha} + \frac{h}{2} \delta\beta_\alpha \right] \right\} \right. \\ \left. + {}^t\{M\} \{\delta K\} + {}^t\{N\} \{\delta\gamma^{nl}\} \right) ds + \int_S \left( {}^t\{N_2\} \{\delta\varepsilon_2\} \right. \\ \left. + {}^t\{Q_2\} \{\delta\xi_2\} + {}^t\{M_2\} \{\delta K\} + {}^t\{N_2\} \{\delta\gamma^{nl}\} \right) ds \quad (14) \end{aligned}$$

où

$$\{N\} = \{N_1 + N_3\}/2 = [C_m] \{\varepsilon_2 + \gamma^{nl}(w, w)\} \quad (15)$$

$$\{n\} = \{N_1 - N_3\}/2 = [C_m] \left\{ \varepsilon \left[ \frac{H}{2} w_{,\alpha} + \frac{h}{2} \beta_\alpha \right] \right\} \quad (16)$$

$$\{M\} = [C_f] \{K\} \quad (17)$$

$$\left\{ \varepsilon \left[ \frac{H}{2} w_{,\alpha} + \frac{h}{2} \beta_\alpha \right] \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{H}{2} w_{,xx} + \frac{h}{2} \beta_{x,x} \\ \frac{H}{2} w_{,yy} + \frac{h}{2} \beta_{y,y} \\ \frac{H}{2} w_{,xy} + \frac{h}{2} \beta_{x,y} + \frac{H}{2} w_{,yx} + \frac{h}{2} \beta_{y,x} \end{Bmatrix}$$

Puisqu'on s'intéresse qu'aux vibrations transversales des plaques, l'inertie de rotation et l'inertie dans le plan, sont négligées et la puissance virtuelle des quantités d'accélération s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\delta P_{acc} = \frac{1}{2} \rho (2H + h) \int_S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w ds \quad (18)$$

Sous l'effet de l'excitation transversale  $F(t)$ , la puissance virtuelle des efforts extérieurs est :

$$\delta P_{\text{ex}} = \int_S F(t) \delta w ds \quad (19)$$

Comme on s'est ramené à la surface moyenne et que la structure est symétrique, les équations des mouvements en flexion et en membrane sont découplées. Celles-ci s'obtiennent directement à partir du principe des puissances virtuelles. Ainsi, l'équation dans le plan est l'équation d'équilibre suivante :

$$\int_S {}^t\{2N + N_2\} \delta \varepsilon_2 ds = 0 \quad (20)$$

Cette équation, associée aux lois de comportement (7) et (15), permettra de déterminer les déplacements dans le plan ( $u, v$ ) en fonction de la flèche  $w$ .

L'équation du mouvement en flexion s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \rho(2H + h) \int_S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w ds + \int_S (2^t\{n\} \left\{ \varepsilon \left[ \frac{H}{2} \delta w_{,\alpha} + \frac{h}{2} \delta \beta_\alpha \right] \right\} \\ + 2^t\{M\} \{\delta K\} + {}^t\{Q_2\} \{\delta \xi_2\} + {}^t\{M_2\} \{\delta K\} \\ + {}^t\{N + N_2\} \{\delta \gamma^{nl}\}) ds = \langle F(t), \delta w \rangle \quad (21) \end{aligned}$$

On a donc à résoudre l'équation d'équilibre (20) et l'équation de flexion (21) en tenant compte des relations de comportement. Il s'agit d'un système complexe, non-linéaire et faisant intervenir des lois viscoélastiques pour la couche centrale. On se contentera de chercher des solutions approchées pour des fréquences proches de la résonance d'une plaque sandwich sont les caractéristiques mécaniques et géométriques et les conditions aux limites sont supposées bien connues.

### 3 Amortissement linéaire et mode complexe

On commence par rappeler l'étude des vibrations linéaires. On cherche des solutions de la forme  $w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t}$  où le mode  $w(x, y)$  est complexe et la fréquence  $\omega$  est complexe. Après discrétisation par éléments finis, le problème des vibrations libres des plaques sandwich viscoélastiques s'écrit sous la forme discrétisée suivante [5] :

$$[K(\omega) - \omega^2 M] [U] = [0] \quad (22)$$

où  $K(\omega)$  est la matrice de rigidité complexe de la plaque et le vecteur  $U$  est le mode complexe. L'équation (22) est un problème aux valeurs propres complexes non-linéaires dont la solution permet de définir, pour chaque mode, l'amortissement linéaire  $\eta$  et la fréquence amortie  $\Omega_1$  par :

$$\omega^2 = \Omega_1^2 (1 + i\eta) \quad (23)$$

Plusieurs méthodes ont été développées pour calculer l'amortissement des structures sandwich

viscoélastiques [4–6, 12, 13, 15]. Ces méthodes peuvent être classées de la façon suivante :

- Méthodes approchées : technique de la bande passante [5], méthode de l'énergie modale [5], méthode QR [6], approche asymptotique [4].
- Méthodes quasi exactes : méthode itérative [12], méthodes asymptotiques numériques [13, 15].

Seules les dernières méthodes permettent de calculer le mode complexe  $U$  et l'amortissement de façon exacte et directe. Les techniques récentes [13, 15] sont basées sur la méthode de perturbation et la technique d'homotopie en transformant, par exemple, le problème (22) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} [K(0) + \varepsilon(K(\omega) - K(0)) - \omega_\varepsilon^2 M] [U_\varepsilon] = [0] \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1 \end{cases} \quad (24)$$

où la matrice  $K(0)$  est une matrice réelle qui tient compte de l'élasticité retardée du matériau viscoélastique. Puis, on cherche le couple inconnu sous forme de série entière du paramètre  $\varepsilon$ . En utilisant toutes les techniques de la méthode asymptotique [15] (continuation, utilisation des approximants de Padé) pour assurer la convergence de la méthode, la solution du problème (22) est alors obtenue, à partir de celle du problème (24) pour  $\varepsilon = 1$ .

## 4 Étude approchée du problème des vibrations non-linéaires

Dans cette partie, nous présentons une méthodologie pour simplifier l'analyse des vibrations non-linéaires des plaques sandwich viscoélastiques à partir de l'équation de flexion (21).

### 4.1 Réduction de l'équation (21) à une équation d'amplitude complexe

Dans cette étude, on suppose que l'excitation transversale est de la forme :

$$F(x, y, t) = f(x, y) \cos(\omega t) \quad (25)$$

En appliquant la méthode de Galerkin à un mode, le déplacement transversal  $w(x, y, t)$  est cherché sous la forme suivante :

$$w(x, y, t) = A w_0(x, y) e^{i\omega t} + CC \quad (26)$$

où  $CC$  désigne le complexe conjugué.  $w_0(x, y)$  est le mode réel des vibrations propres de la plaque sandwich en tenant compte seulement de l'élasticité retardée de la couche centrale. La pulsation propre associée à  $w_0(x, y)$  est notée  $\omega_0$  et  $A$  est une amplitude complexe inconnue.

Le couple  $(w_0, \omega_0)$  vérifie le problème aux valeurs propres réelles suivant :

$$-\rho(2H+h)w_0^2 \int_S w_0 \delta w ds + \int_S \left( 2^t \{n\} \left\{ \varepsilon \left[ \frac{H}{2} \delta w_{,\alpha} + \frac{h}{2} \delta \beta_\alpha \right] \right\} + 2^t \{M\} \{\delta K\} + {}^t \{Q_2\} \{\delta \xi_2\} + {}^t \{M_2\} \{\delta K\} \right) ds = 0 \quad (27)$$

En injectant l'approximation (26) de  $w$  dans l'équation d'équilibre dans le plan (20) et en tenant compte des lois de comportement (5), (7) et de la règle de calcul (10), on déduit que  $\varepsilon_2$  est de la forme :

$$\varepsilon_2 = 2A \bar{A} \varepsilon_{20} + \{A^2 \varepsilon_{22} e^{2i\omega t} + CC\} \quad (28)$$

où  $\varepsilon_{20}$  et  $\varepsilon_{22}$  sont solutions des problèmes suivants :

$$\int_S {}^t \{\varepsilon_{20}\} [2C_m + C_m^{2*}(0)] \{\delta \varepsilon_2\} ds = -2 \int_S {}^t \{\gamma^{nl}(w_0, w_0)\} [2C_m + C_m^{2*}(0)] \{\delta \varepsilon_2\} ds \quad (29)$$

$$\int_S {}^t \{\varepsilon_{22}\} [2C_m + C_m^{2*}(2\omega)] \{\delta \varepsilon_2\} ds = - \int_S {}^t \{\gamma^{nl}(w_0, w_0)\} [2C_m + C_m^{2*}(2\omega)] \{\delta \varepsilon_2\} ds \quad (30)$$

L'approximation (26) implique que la pulsation  $\omega$  de l'excitation et de la réponse est proche de  $\omega_0$ , ceci nous permet de remplacer la matrice de comportement  $C_m^{2*}(2\omega)$  par  $C_m^{2*}(2\omega_0)$  dans l'équation (30).

En reportant les équations (26), (28), (29), (30) dans l'équation de flexion (21), en choisissant  $\delta w = w_0(x, y) e^{-i\omega t}$  (méthode de Galerkin à un mode) et en ne retenant que les termes indépendants du temps (méthode de la balance harmonique), l'équation du mouvement en flexion se ramène alors à l'équation d'amplitude scalaire suivante :

$$-\omega^2 mA + kA + k_{nl} A^2 \bar{A} k_{nl} = \langle F, w_0 \rangle = f \quad (31)$$

où  $m$  et  $k$  sont les constantes classiques qui permettent d'estimer la pulsation et l'amortissement des tôles sandwich dans le cas linéaire. La constante  $k_{nl}$  s'écrit :

$$k_{nl} = \int_S 2^t \{\gamma^{nl}(w_0, w_0)\} [C_m + C_m^{2*}(0)] \{\varepsilon_{20} + \gamma^{nl}(w_0, w_0)\} ds + \int_S {}^t \{\gamma^{nl}(w_0, w_0)\} [C_m + C_m^{2*}(2\omega_0)] \{\varepsilon_{22} + \gamma^{nl}(w_0, w_0)\} ds \quad (32)$$

Cette dernière permet d'introduire l'effet non-linéaire géométrique dans l'analyse.

Finalement, l'équation d'amplitude permet une étude approchée des vibrations linéaires et non-linéaires des structures sandwich viscoélastiques en calculant seulement les deux coefficients  $k/m$  et  $k_{nl}/m$ .

## 4.2 Calcul par éléments finis des constantes de l'équation d'amplitude

Afin de calculer numériquement les constantes  $k/m$ ,  $k_{nl}/m$ , il suffit de résoudre les problèmes (27), (29) et (30) par la méthode des éléments finis. Pour cela, nous choisissons l'élément sandwich établi dans [14]. Cet élément est triangulaire à trois nœuds et huit degrés de liberté par nœud : les déplacements longitudinaux des couches d'acier, la flèche et trois rotations. En utilisant la théorie des plaques de Kirchhoff, il est construit en assemblant deux éléments plaque de type DKT et d'un élément volume dans la couche centrale pour mieux rendre compte du cisaillement. Cet élément a été développé pour discrétiser le problème des vibrations linéaires et libres des structures sandwich viscoélastiques (22). Le couple  $(w_0, \omega_0)$  est alors solution du problème suivant :

$$[K(0) - \omega_0^2 M] [w_0] = [0] \quad (33)$$

où  $K(0)$  est la matrice réelle définie à la section 3.

Les constantes  $m$  et  $k$  sont calculées à l'aide des formules suivantes :

$$m = [w_0]^t [M] [w_0], \quad k = [w_0]^t [K(\omega_0)] [w_0] \quad (34)$$

Connaissant le couple  $(w_0, \omega_0)$ , les problèmes (29) et (30) deviennent des problèmes linéaires classiques. Pour les discrétiser, il suffit d'utiliser l'élément triangulaire de plaque à 3 nœuds, dont la matrice de rigidité élémentaire est construite à partir de la matrice de comportement  $[2C_m + C_m^{2*}(0)]$  pour le problème (29), et de  $[2C_m + C_m^{2*}(\omega)]$  pour le problème (30). Le vecteur force élémentaire des deux problèmes sera calculé en fonction du mode réel  $w_0(x, y)$ .

## 4.3 Analyse de l'équation d'amplitude : amortissement linéaire, non-linéaire et courbes de réponses

L'équation d'amplitude (31) permet l'étude des vibrations libres ou forcées dans le cas linéaire et non-linéaire des plaques sandwich viscoélastiques.

Dans le cas des vibrations libres ( $f = 0$ ) et linéaires ( $k_{nl} = 0$ ), l'amortissement  $\eta$  est défini par la formule classique (23) à partir de la raideur complexe  $k = k^R + ik^I$  :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \Omega_1^2 (1 + i\eta), \quad \Omega_1^2 = \frac{k^R}{m}, \quad \eta = \frac{k^I}{m} \quad (35)$$

$\Omega_1$  est la pulsation amortie. Il faut noter que les quantités  $\Omega_1$ ,  $\eta$  obtenues par (35) sont des approximations par rapport aux quantités « exactes » obtenues à la section 3 par résolution du problème aux valeurs propres non-linéaires (22). Cette approximation est équivalente à celle de la méthode approchée à savoir la méthode d'énergie modale utilisant le mode réel [5].



Dans le cas non-linéaire l'amortissement  $\eta_{nl}$  et la pulsation  $\Omega_{nl}$  dépendent de l'amplitude  $A$  :

$$\begin{cases} \omega^2 = \Omega_{nl}^2(1 + i\eta_{nl}) \\ \Omega_{nl}^2 = \Omega_1^2(1 + C^R a^2) \\ \eta_{nl} = \eta_1 \frac{1 + C^I a^2}{1 + C^R a^2} \end{cases} \quad (36)$$

où  $a = |A|^2$ ,  $k_{nl} = k_{nl}^R + ik_{nl}^I$ ,  $C^R = \frac{k_{nl}^R}{\Omega_1^2}$  et  $C^I = \frac{k_{nl}^I}{\Omega_1^2}$ .

Enfin, l'équation d'amplitude permet d'étudier les vibrations forcées ( $f$  non nul) en cherchant l'amplitude  $A$  sous la forme  $A = r(\omega)e^{i\theta}$ . Ainsi, les courbes de réponse approchées  $r(\omega)$  (amplitude des vibrations en fonction de la pulsation) ou  $\omega(r)$ , pour différentes excitations, sont obtenues à partir de deux constantes complexes  $k/m$  et  $k_{nl}/m$ .

## 5 Applications numériques et discussion

Pour valider la présente méthode, nous considérons deux tests différents. Le premier est un exemple issu de la littérature, tandis que le deuxième est un cas issu d'essais industriels. Pour tous ces tests, un maillage suffisamment fin a été utilisé pour assurer la convergence de la méthode des éléments finis.

### 5.1 Test 1

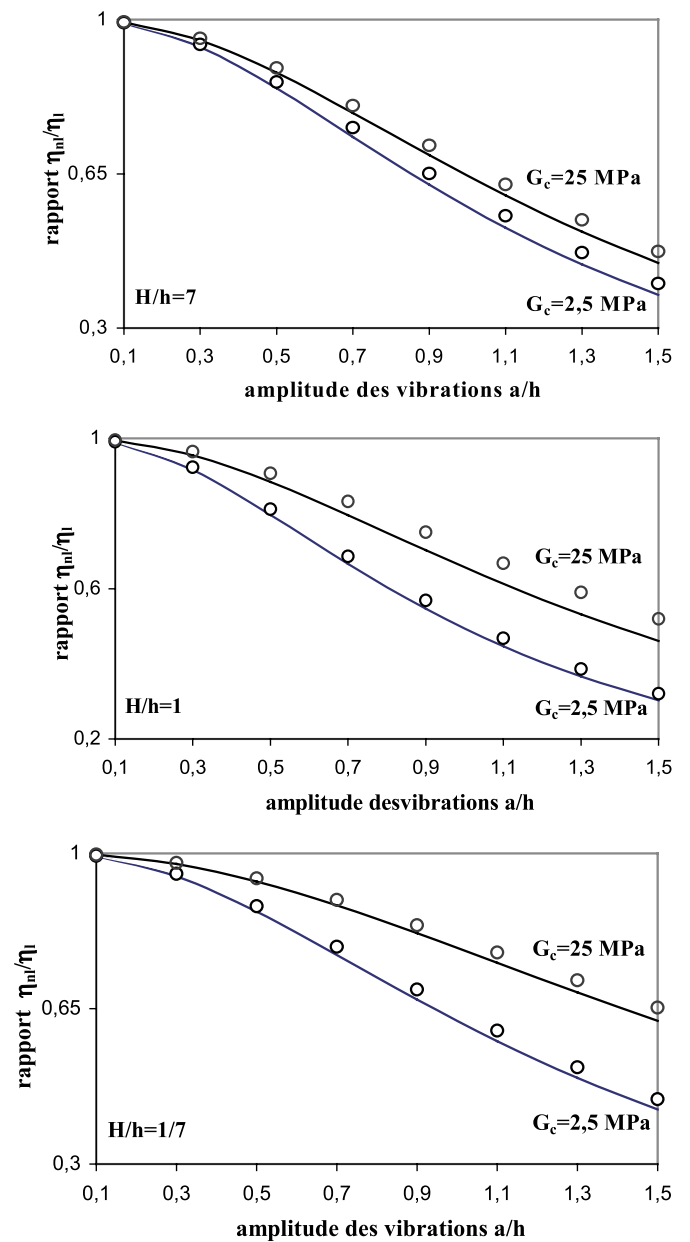
Il s'agit d'une poutre sandwich en appui simple aux deux extrémités. Ici, nous supposons que le module du matériau viscoélastique est constant et complexe :  $E_{vis} = E_c(1 + i\eta_c)$ . Ce concept de module complexe constant est très utilisé dans la littérature [2–6]. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées dans le tableau 1. Les valeurs d'amortissement linéaire et non-linéaire de cette poutre, obtenues par la présente méthode pour différentes valeurs de  $H$ ,  $h$ ,  $L$  et  $E_c$  sont présentés dans le tableau 2 et la figure 2. Ces résultats concernant le premier mode de vibration, sont en accord avec ceux obtenus par Ganapathi et al. [20] en utilisant la méthode des éléments finis et une méthode itérative pour résoudre le problème non-linéaire.

### 5.2 Test 2

Ce test concerne l'étude des vibrations non-linéaires forcées de l'essai d'impédance mécanique. Cet essai expérimental a été effectué par la société Sollac. Il s'agit d'une plaque suspendue, libre et soumise à un effort harmonique en son centre. Le comportement du matériau viscoélastique dépend de la fréquence et de la température. Il est modélisé par le modèle de Maxwell généralisé dont les coefficients sont déterminés par une méthode décrite dans [1] à partir des essais de relaxation. Les caractéristiques de la plaque sont données dans

**Tableau 1.** Caractéristiques géométriques et mécaniques du test 1.

Couches élastiques	
Module d'Young :	45,54 GPa
Coefficient de Poisson :	0,33
Masse volumique :	2040 kg.m <sup>-3</sup>
Couche viscoélastique	
Module $E_c$ :	7,2, 72,5, 7250 MPa
Coefficient de Poisson :	0,45
Masse volumique :	1200 kg.m <sup>-3</sup>
$\eta_c$ :	0,5



**Fig. 2.** Amortissement non-linéaire ( $\eta_{nl}/\eta$ ) en fonction de l'amplitude ( $a/(2H + h)$ ) pour  $L/(2H + h) = 70$ . o : résultats de Ganapathi et al. [20], – : résultats de la présente méthode.

**Tableau 2.** Amortissement linéaire  $\eta_l$  en fonction de  $L/(2H + h)$ ,  $E_c$  et  $H/h$ .

$L/(2H + h)$	$E_c = 7,25$ MPa		$E_c = 72,5$ MPa		$E_c = 7250$ MPa	
	10	200	10	200	10	200
$H/h = 7$	$5,37 \times 10^{-2*}$	$2,08 \times 10^{-2}$	$1,77 \times 10^{-1}$	$2,50 \times 10^{-3}$	$1,07 \times 10^{-2}$	$1,00 \times 10^{-4}$
	$5,71 \times 10^{-2+}$	$2,59 \times 10^{-1}$	$1,86 \times 10^{-1}$	$2,83 \times 10^{-3}$	$1,08 \times 10^{-2}$	$9,00 \times 10^{-5}$
$H/h = 1$	$5,02 \times 10^{-2}$	$8,30 \times 10^{-2}$	$2,27 \times 10^{-1}$	$1,01 \times 10^{-2}$	$4,07 \times 10^{-2}$	$3,50 \times 10^{-3}$
	$5,27 \times 10^{-2}$	$9,11 \times 10^{-2}$	$2,34 \times 10^{-1}$	$1,13 \times 10^{-2}$	$4,42 \times 10^{-2}$	$3,23 \times 10^{-3}$
$H/h = 1/7$	$3,41 \times 10^{-1}$	$7,39 \times 10^{-2}$	$4,19 \times 10^{-1}$	$9,30 \times 10^{-3}$	$1,00 \times 10^{-1}$	$6,83 \times 10^{-2}$
	$3,49 \times 10^{-1}$	$8,14 \times 10^{-2}$	$4,12 \times 10^{-1}$	$1,02 \times 10^{-2}$	$9,88 \times 10^{-2}$	$6,28 \times 10^{-2}$

\* : résultats de Ganapathi et al. [20], + : résultats de la présente méthode

**Tableau 3.** Caractéristiques géométrique et mécanique de l'essai d'impédance mécanique.

Couches élastiques	
Module d'Young :	$2,1 \times 10^{11}$ Pa
Coefficient de Poisson :	0,3
Masse volumique :	$7800 \text{ kg.m}^{-3}$
Épaisseur ( $H$ ) :	0,4 mm
Couche viscoélastique	
Module d'élasticité retardée	$27,216 \times 10^5$ Pa
Coefficient de Poisson :	0,44
Masse volumique :	$1200 \text{ kg.m}^{-3}$
Épaisseur ( $h$ ) :	0,05 mm
Dimension de la plaque	
Longueur	300 mm
Largeur	30 mm

le tableau 3. Dans les tableaux 4, 5 on présente les fréquences et les amortissements linéaires à  $50^\circ\text{C}$  et à  $80^\circ\text{C}$ , correspondant aux trois premiers modes de vibrations. Ils sont comparés à des résultats expérimentaux et à ceux présentés dans [13]. Ces dernières sont obtenues par résolution du problème aux valeurs propres non-linéaires, comme rappelé à la section 3. En général, on peut noter un bon accord entre les résultats présentés. Cependant, la méthode approchée surestime l'amortissement linéaire correspondant au premier mode à  $50^\circ\text{C}$ . En effet, à cette température l'amortissement de la couche viscoélastique  $\eta_c$  est relativement grand pour le premier mode ( $\eta_c = 0,5$ ) et l'hypothèse d'un mode indépendant de la viscosité (cf. (26),  $w_0$  mode réel) n'est certainement plus valable. Pour une meilleure approximation du mode complexe, on peut utiliser, par exemple le mode obtenu par résolution du problème linéaire ci-dessous :

$$[K(\omega_0) - \omega_0^2 M] [w_0] = [F]$$

$[F]$  étant l'excitation extérieure.

La figure 3 représente la simulation numérique des courbes de réponse de la plaque à  $50^\circ\text{C}$  pour différentes valeurs du chargement  $f$ . On note ici que, la prise en compte de l'effet non-linéaire est nécessaire quand la plaque est soumise à des flèches de l'ordre de l'épaisseur du sandwich.

## 6 Conclusions

Dans cet article, nous avons présenté une méthode numérique qui permet d'étudier les vibrations linéaires et non-linéaires des plaques sandwich viscoélastiques en calculant pour chaque mode, seulement deux coefficients  $k/m$  et  $k_{nl}/m$ . Le premier coefficient  $k/m$  permet de retrouver une approximation classique de l'amortissement et la fréquence en petits mouvements en présence de la viscosité. Grâce au second coefficient, on obtient une dépendance de la fréquence et de l'amortissement par rapport à l'amplitude des vibrations. Ces coefficients sont calculés par la méthode des éléments finis et la technique de la balance harmonique couplée à la méthode de Galerkin à un mode. Cette analyse approchée permet de retrouver les courbes classiques de résonance, qui sont ici obtenues pour des plaques de forme quelconque avec différentes lois viscoélastiques.

## Annexes

Matrices du comportement d'une couche élastique

$$C_m = \frac{EH}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix},$$

$$C_f = \frac{EH^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix}$$

Matrices du comportement de la couche viscoélastique

$$C_m^{2*}(\omega) = \frac{E_{vis}(\omega)h}{(1 - \nu_{vis}^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{vis} & 0 \\ \nu_{vis} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu_{vis} \end{bmatrix},$$

$$C_f^{2*}(\omega) = \frac{E_{vis}(\omega)h^3}{12(1 - \nu_{vis}^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{vis} & 0 \\ \nu_{vis} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu_{vis} \end{bmatrix}$$

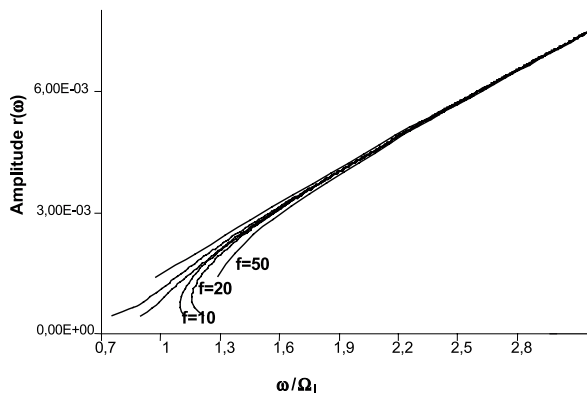
$$C_{cis}^{2*}(\omega) = \frac{E_{vis}(\omega)h}{(1 + \nu_{vis})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Tableau 4.** Fréquences et amortissements à 50 °C.

Résultats issus de [13]		Résultats expérimentaux		Résultats de la présente méthode	
$f$	$\eta$	$f$	$\eta$	$f$	$\eta$
48	$2,48 \times 10^{-2}$	48	$2,25 \times 10^{-2}$	49	$5,62 \times 10^{-2}$
213	$8,80 \times 10^{-2}$	211	$8,45 \times 10^{-2}$	218	$1,18 \times 10^{-1}$
450	$1,25 \times 10^{-1}$	459	$1,37 \times 10^{-1}$	455	$1,36 \times 10^{-1}$

**Tableau 5.** Fréquences et amortissements à 80 °C.

Résultats issus de [13]		Résultats de la présente méthode	
$f$	$\eta$	$f$	$\eta$
47	$2,40 \times 10^{-2}$	47	$2,74 \times 10^{-2}$
199	$9,54 \times 10^{-2}$	199	$1,05 \times 10^{-1}$
423	$9,22 \times 10^{-2}$	423	$9,75 \times 10^{-2}$

**Fig. 3.** Courbes de réponse de l'essai d'impédance mécanique à 50 °C pour  $f = 10, 20$  et  $50$ .

## Références

- [1] J. Landier, Modélisation et étude expérimentales des propriétés amortissantes des tôles sandwich, Thèse, Université de Metz, 1993
- [2] D.K. Rao, Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions, *J. Mech. Eng. Sci.* 20(5) (1978) 271–282
- [3] P. Cupial, J. Niziol, Vibration and damping analysis of three-layered composite plate with viscoelastic mid-layer, *J. Sound Vibration* 183(1) (1995) 99–114
- [4] B.A. Ma, J.F. He, A Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates, *J. Sound Vibration* 152 (1992) 107–123
- [5] M.L. Soni, Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures, *Shock and Vibration Bull.* 55(1) (1981) 97–109
- [6] R. Rikards, A. Chate, E. Barkanov, Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites, *Computers and Structures* 47(6) (1993) 1005–1015
- [7] Y.P. Lu, J.W. Killian, G.C. Everstine, Vibrations of three layered damped sandwich plate composites, *J. Sound Vibration* 64(1) (1979) 63–71
- [8] M.G. Sainsbury, Q.J. Zhang, The Galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams, *Computers and Structures* 71 (1999) 239–256
- [9] T.C. Ramesh, N. Ganesan, Finite element analysis of conical shells with a constrained viscoelastic layer, *J. Sound Vibration* 171(5) (1994) 577–601
- [10] T. Baber Thomas, A. Maddox Richard, E. Orozco Carlos, A finite element model for harmonically excited viscoelastic sandwich beams, *Computers and Structures* 66(1) (1998) 105–113
- [11] N. Alam, N.T. Asnani, Vibration and damping of multi layered cylindrical shell, Part I. *AIAA J.* 22 (1984) 803–10–975–81
- [12] X. Chen, H.L. Chen, Le. Hu, Damping prediction of sandwich structures by order-reduction-iteration approach, *J. Sound Vibration* 222(5) (1999) 803–812
- [13] E.M. Daya, M. Potier-Ferry, A numerical method for non-linear eigenvalue problem, application to vibrations of viscoelastic structures, *Computers and Structures* 79 (2001) 533–541
- [14] E.M. Daya, M. Potier-Ferry, A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures, *Revue Européenne des Éléments Finis* 11(1) (2002) 39–56
- [15] L. Duigou, E.M. Daya, M. Potier-Ferry, Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems, Application to vibrations of viscoelastic shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003) 1323–1335
- [16] F.N. Adamou, P. Muller, M.T. Gautherin, Évaluation de l'amortissement d'une plaque sandwich acier-polymère-acier, *Damping prediction of sandwich plate with constrained viscoelastic layer*, *Mécanique & Industries* 4 (2003) 77–81
- [17] M. Macé, Damping of beam vibration by means of thin constrained viscoelastic layer: Evaluation of a new theory, *J. Sound Vibration* 172(5) (1994) 577–591
- [18] S. Adhikari, Optimal complex modes and an index of damping non-proportionality, *Mechanical Systems and Signal Processing* 18 (2004) 1–27
- [19] Z.Q. Xia, S. Lukasiewicz, Non-linear analysis of damping properties of cylindrical sandwich panels, *J. Sound Vibration* 186(1) (1995) 55–69
- [20] M. Ganapathi, B.P. Patel, P. Boisse, O. Polit, Flexural loss factors of sandwich and laminated beams using linear and nonlinear dynamic analysis, *Composite Part B* 30 (1999) 245–256
- [21] E.M. Daya, L. Azrar, M. Potier-Ferry, Modélisation des vibrations non-linéaires des structures sandwich viscoélastiques, *Septième Journées d'Analyse Numérique et d'Optimisation, Tanger-Maroc, 2002*, pp. 1–6
- [22] E.M. Daya, L. Azrar, M. Potier-Ferry, An amplitude equation for nonlinear vibrations of viscoelastically damped sandwich beams, *J. Sound Vibration*, 271 (2004) 789–813