

Concept probabiliste de chargement sismique critique temporel

SIMON CAMBIER^a

EDF R & D, 1 Ave. du Général de Gaulle, 92141 Clamart, France

Reçu le 25 février 2005, accepté le 21 mars 2005

Résumé – Nous considérons la réponse transitoire d'une structure soumise à une excitation sismique modélisée comme un processus stochastique connu par sa densité spectrale de puissance. Un concept d'excitation critique est proposé : c'est la trajectoire temporelle de l'excitation qui est la plus probable et qui conduit la réponse du système à dépasser un seuil prédéfini. Après avoir présenté l'expression analytique de l'excitation critique pour un oscillateur linéaire à un degré de liberté, l'excitation critique pour une structure industrielle est recherchée.

Mots clés : Mécanique probabiliste des structures / séisme / excitation critique

Abstract – **Probabilistic concept of critical time-history seismic load.** The transient response of a structure subjected to a seismic excitation modeled as a stochastic process known by its power spectral density is considered. A concept of critical excitation is proposed: it is the sample time history of the most probable excitation and which leads the response of the system to exceed a preset threshold. After having presented an analytical expression of the critical excitation for a single-degree of freedom linear oscillator, the critical excitation of an industrial structure is studied.

Key words: Probabilistic mechanics of structure / earthquake / critical excitation

1 Introduction

Dans un cadre réglementaire, le chargement sismique est généralement défini par la donnée d'un spectre de réponse élastique (ou spectre de réponse d'oscillateur) [1]. A contrario, afin de vérifier la tenue au séisme de structures à comportement non-linéaire, une définition du chargement sismique sous forme temporelle (« accélérogrammes ») est nécessaire.

Cependant, selon la méthode de définition choisie (génération d'accélérogrammes « synthétiques » ou sélection d'accélérogrammes naturels par exemple) et selon les accélérogrammes utilisés in fine (tous compatibles avec le même spectre de réponse élastique), les résultats des calculs non-linéaires sur la structure sont en général très dispersés ([2] et [3] par exemple). Or, les règlements sont assez permissifs quant au choix de la méthode de définition du chargement sismique temporel et il ne se dégage pas de consensus évident de l'état de l'art international.

Une bonne pratique serait de considérer un chargement pénalisant afin de vérifier de façon conservative la tenue de la structure. Il est toutefois difficile de

définir un chargement temporel pénalisant pour un calcul dynamique.

Dans cet article, on étudie un chargement critique temporel défini à partir d'une représentation stochastique du signal sismique. La première partie introduit la définition choisie pour le chargement critique. La seconde partie présente les résultats analytiques obtenus avec un modèle simplifié de l'excitation sismique et un oscillateur à un degré de liberté. La dernière partie propose des résultats préliminaires obtenus sur une tuyauterie industrielle à comportement non-linéaire.

2 Définition du chargement sismique critique temporel

Le chargement sismique peut être considéré comme un processus aléatoire défini par sa densité spectrale. Un des modèles stochastiques le plus abouti du signal sismique est celui proposé dans [4]. Le signal sismique y est considéré comme un processus non stationnaire dont la densité spectrale de puissance s'écrit :

$$S(t, f) = t^2 e^{-\alpha(f)t} \psi(f) \quad (1)$$

^a Auteur correspondant : simon.cambier@edf.fr

Nomenclature

$b(t)$	Réalisation d'un bruit blanc gaussien stationnaire $B(t)$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
t	Temps
f	Fréquence (Hz)
$h(t)$	Réponse impulsionnelle de l'oscillateur (s)
$S(t, f)$	Densité spectrale de puissance ($\text{m}^2\cdot\text{s}^{-4}\cdot\text{Hz}^{-1}$)
S_0	Intensité du bruit blanc ($\text{m}^2\cdot\text{s}^{-4}\cdot\text{Hz}^{-1}$)
u_k	Réalisations de variables aléatoires gaussiennes U_k centrées réduites
$x(t)$	Déplacement (m)
ξ	Amortissement réduit
ω_n	Pulsation naturelle ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)
ω_c	Pulsation de coupure du bruit blanc tronqué ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)
λ	Seuil en déplacement (m)
$\sigma_x^2(T)$	Variance de x à l'instant $t = T$, (m^2)

où t est le temps, f est la fréquence, et où $\alpha(f)$ et $\psi(f)$ peuvent être déterminés à partir du spectre de réponse élastique défini pour le site.

Cette représentation stochastique du signal sismique permet de donner un cadre mathématique pour la prise en compte de la variabilité du signal sismique. Elle donne également un cadre pratique permettant de générer des accélérogrammes synthétiques. Dans ce cas, le processus aléatoire constitué par le signal sismique temporel est discrétisé et on peut se ramener ainsi à un problème probabiliste classique avec un nombre fini de variables aléatoires.

Plusieurs auteurs ont proposé des concepts différents pour le chargement sismique critique. Dans [5], le chargement critique est défini comme la combinaison linéaire d'accélérogrammes naturels compatibles avec un site donné qui maximise le dommage d'une structure donnée. Dans [6], c'est la densité spectrale de puissance maximisant la variance de la réponse d'une structure qui définit l'excitation critique. Dans [7], la densité spectrale de puissance de l'excitation critique maximise à la fois le taux de passage d'un seuil donné et l'entropie de l'excitation.

[6] et [7] recherchent la densité spectrale de puissance de l'excitation critique et donc le contenu fréquentiel critique. Le contenu fréquentiel étant en général imposé par le règlement, et afin de pouvoir effectuer des calculs temporels pour des structures à comportement non-linéaire, nous recherchons ici l'excitation sous forme temporelle, la densité spectrale étant fixée. À l'instar de [5], le chargement critique recherché ici est temporel. En revanche, notre approche est probabiliste et nous n'avons pas recours à des accélérogrammes naturels souvent en nombre insuffisant. Le chargement étant considéré sous forme temporelle, nous parlerons d'excitation.

Considérons un processus aléatoire $B(t)$ caractérisant le chargement sismique d'une structure et la réponse $x(t)$ de cette structure (en déplacement ou contrainte ...). L'excitation critique est définie ici comme la trajectoire temporelle $b^*(t)$ du processus $B(t)$ qui est la plus probable et qui conduit la réponse $x(t)$ de la structure à dépasser un seuil λ à un instant T .

La formulation de l'excitation critique que nous avons utilisée suppose que l'on regarde le dépassement du seuil au bout d'un temps T donné. Dans cette formulation, il faut donc choisir l'instant T a priori. On peut d'ores et déjà penser à prendre par exemple comme valeur le temps d'arrivée des premiers cycles forts caractéristiques. Dans cet article le temps T sera supposé arbitrairement fixé, mais l'influence du choix de T devra être étudiée.

3 Résultats analytiques pour un cas simple

Considérons un oscillateur linéaire à un degré de liberté décrit par l'équation

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = b(t) \quad (2)$$

où ω_n est la pulsation naturelle, ξ l'amortissement réduit et où $b(t)$ est une réalisation d'un bruit blanc gaussien stationnaire $B(t)$ d'intensité S_0 , de moyenne nulle, et tronqué à la pulsation ω_c (on suppose $\omega_c > \omega_n$).

La trajectoire temporelle $b(t)$ peut être discrétisée en n pas de temps t_k avec :

$$b(t_k) = \sqrt{\frac{2\pi S_0}{\Delta t}} u_k \quad (3)$$

où les u_k sont des réalisations de variables aléatoires gaussiennes U_k centrées réduites et indépendantes, et où Δt est le pas de temps de discrétisation tel que $\Delta t < \pi/\omega_n$.

Trouver la trajectoire temporelle $b^*(t)$ discrétisée du processus $B(t)$ qui est la plus probable et qui conduit la réponse $x(t)$ de la structure à dépasser un seuil λ à un instant T revient alors à trouver le vecteur $[u_k^*]$ vérifiant :

$$[u_k^*] = \arg \min_{[u_k]} \left(\|[u_k]\|^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 \text{ tel que } x(T) = \lambda \right) \quad (4)$$

Appelant h la réponse impulsionnelle de l'oscillateur, $x(T)$ peut s'écrire :

$$x(T) = \int_0^T h(T-t)b(t)dt \approx \sqrt{2\pi S_0 \Delta t} \sum_{k=1}^n h(T-t_k)u_k \quad (5)$$

$$b^*(t) = \frac{4\xi\omega_n^2 \cdot \lambda}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\exp(-\xi\omega_n(T-t)) \cdot \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \cdot (T-t))}{1 - \frac{\exp(-2\xi\omega_n T)}{\omega_n'^2} (\omega_n'^2 + 2(\xi\omega_n \sin \omega_n' T)^2 + \xi\omega_n\omega_n' \sin 2\omega_n' T)} \cdot 1_{0 \leq t \leq T}(t) \quad (8)$$

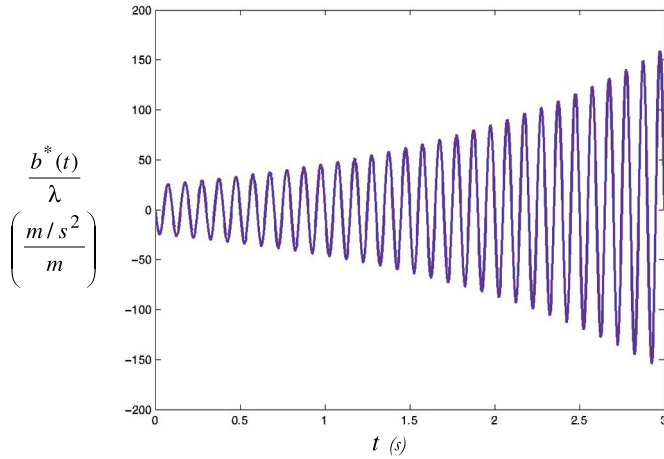


Fig. 1. Excitation critique pour un oscillateur linéaire à un degré de liberté avec $\xi = 0,01$, $\omega_n/2\pi = 10$ Hz, $\omega_c/\omega_n = 1,5$ et $T = 3$ s.

Le déplacement de l'oscillateur à l'instant T s'écrit donc comme une combinaison linéaire des u_k , et la contrainte $x(T) = \lambda$ devient une contrainte linéaire. (4) est ainsi un problème d'optimisation quadratique avec une contrainte linéaire dont la solution analytique prend pour expression :

$$u_k^* = \sqrt{2\pi S_0 \Delta t} h(T - t_k) \frac{\lambda}{2\pi S_0 \Delta t \sum_{i=1}^n h^2(T - t_i)} \quad (6)$$

Substituant (6) dans (3) et remarquant d'après (5), que la variance de $x(T)$ s'écrit $\sigma_x^2(T) = 2\pi S_0 \Delta t \sum_{i=1}^n h^2(T - t_i)$, on obtient « l'excitation critique » discrétisée au temps t_k :

$$b^*(t_k) = \frac{2\pi S_0 \lambda}{\sigma_x^2(T)} h(T - t_k) \quad (7)$$

Substituant l'expression analytique de $\sigma_x^2(T)$ et l'expression analytique de la réponse impulsionnelle h de l'oscillateur dans (7), « l'excitation critique » dans ce cas simple prend ainsi la forme :

voir l'équation (8) ci-dessus

avec $\omega_n' = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ et $1_{0 \leq t \leq T}(t)$ la fonction indicatrice valant 1 sur $[0, T]$ et nulle ailleurs.

On voit bien sur la figure 1 que le chargement critique prend la forme d'une réponse impulsionnelle « rétrograde » dont la période correspond à celle de l'oscillateur.

4 Recherche de l'excitation critique d'une structure industrielle

Dans le cas général et pour des structures à comportement non-linéaire en particulier, il n'est bien sûr pas possible d'exhiber une expression analytique de l'excitation critique. Cependant, à la condition que l'on sache écrire le chargement sous une forme discrète (autrement dit que l'on sache générer des réalisations aléatoires du chargement), la recherche de l'excitation critique peut être formulée comme un problème d'optimisation dans un espace de dimension finie. Ce problème d'optimisation est strictement le même que celui qui est résolu dans la méthode FORM (First Order Reliability Method, [8]). Les algorithmes spécifiquement développés pour cette méthode ([9] par exemple) peuvent donc être avantageusement utilisés pour la recherche de l'excitation critique.

Cependant, le cas général présente deux principales difficultés. La première difficulté est que la discrétisation temporelle fine du chargement engendre une dimension de l'espace de recherche très grande. Le problème d'optimisation peut alors devenir très coûteux à résoudre. Le cas échéant, le calcul des gradients de la réponse du système mécanique par rapport aux variables de la discrétisation peut être déterminant. La deuxième difficulté est l'existence possible d'un grand nombre d'optima locaux au problème d'optimisation. Chaque optimum local est une excitation critique potentiellement pertinente qu'il faut alors prendre en compte. On peut toutefois noter que la recherche des excitations critiques est moins ardue que le calcul de la probabilité de dépassement d'un seuil donné. [10] et [11] montrent la difficulté du calcul de cette probabilité (probabilité de défaillance dans le jargon fiabiliste) pour le cas présent où le nombre de variables aléatoires est grand et où il peut exister plusieurs optima locaux (« points de conception » dans le jargon fiabiliste). Or, pour une structure industrielle, le calcul de cette probabilité n'apporte pas forcément l'information la plus pertinente. On n'essaye donc pas de calculer ici cette probabilité, et la difficulté est donc moindre.

La recherche d'excitation critique a été entreprise pour une tuyauterie industrielle d'une longueur d'environ 14 mètres, comportant cinq coudes, et dont la première fréquence propre est proche de 7 Hz (Fig. 2, [12]). La réponse sismique est obtenue par calculs transitoires élastoplastiques avec une modélisation filaire de type tuyau (cinématique mixte de poutre et de coque) à plasticité locale avec un schéma d'intégration implicite de Newmark-Newton (logiciel *Code_Aster*, [13]). La loi de comportement est un écrouissage cinématique linéaire.

Dans un premier temps, on considère le modèle simplifié de l'excitation utilisé dans la partie 3. Ce modèle stationnaire est valable si l'on considère uniquement la partie forte du signal sismique. Le critère examiné est

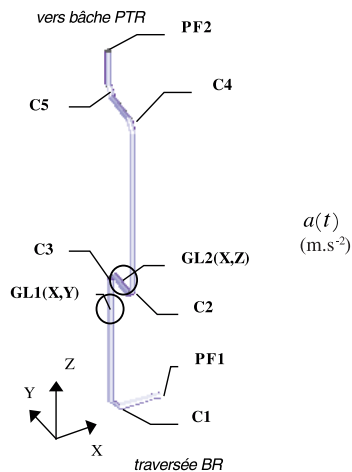


Fig. 2. Modèle de la portion de ligne étudiée.

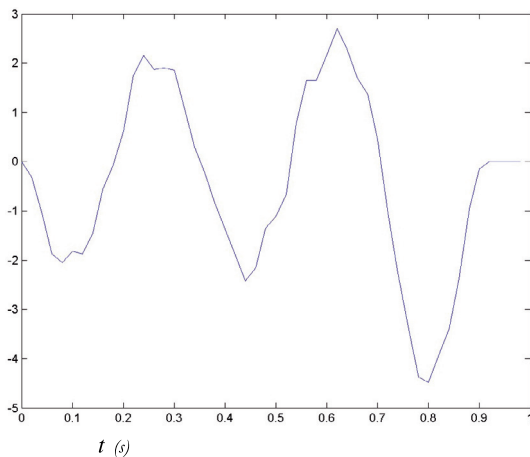


Fig. 3. Première excitation critique trouvée pour la ligne de tuyauterie.

la contrainte équivalente de Von Mises maximale sur la tuyauterie. Le seuil λ à ne pas dépasser est pris égal à 110 % de la limite d'élasticité du matériau. L'excitation critique a été recherchée pour une durée petite (une seconde) permettant de réduire le nombre de variables aléatoires. La première excitation trouvée est montrée sur la figure 3.

Ces résultats préliminaires sur une structure industrielle montrent que :

- le contenu fréquentiel de l'excitation critique trouvée est à bande étroite. Si l'on veut que l'excitation critique soit plus conforme aux signaux naturels qui sont en général à bande plus large, il serait donc sûrement pertinent de rajouter une contrainte au problème d'optimisation sur la largeur de bande.
- Sur un cas industriel et lorsque les gradients ne sont pas disponibles, les temps de calcul peuvent devenir rédhibitoires. Si les gradients sont évalués par différences finies, le nombre de calculs mécaniques pour chaque itération devient considérable puisque le nombre de variables aléatoires correspond à la discrétisation temporelle du chargement et peut donc

s'élever à plusieurs centaines. C'est pourquoi, le calcul direct des dérivées au sein du code de mécanique *Code_Aster* a été entrepris.

- L'existence possible de plusieurs excitations critiques avec des probabilités associées voisines oblige à apporter un soin particulier lors du processus d'optimisation. Une possibilité est alors d'initialiser l'algorithme d'optimisation locale avec les excitations critiques dont la formule analytique est proposée dans la partie 3 et qui correspondent aux différents modes linéaires de la structure.

Par ailleurs, la ou les excitations critiques apportent des informations très intéressantes ; on peut, par exemple, calculer les indicateurs de nocivité (Intensité d'Arias, accélération maximale, ...) utilisés en ingénierie sismique. Les valeurs obtenues peuvent alors être comparées aux valeurs prescrites pour le site étudié.

5 Conclusion

Cet article propose d'utiliser un concept d'excitation critique temporelle pour l'étude de la tenue au séisme de structures à comportement non-linéaire. Après avoir présenté la forme analytique de l'excitation critique pour un oscillateur linéaire à un degré de liberté, des résultats sur une structure industrielle sont présentés. Ces résultats encourageants devront être complétés notamment :

- en considérant le modèle probabiliste plus réaliste du signal sismique rappelé dans la partie 2, ainsi que des développements en série du signal permettant de réduire le nombre de variables aléatoires (développement de Karhunen-Loeve, ...) ;
- en étudiant l'influence du temps T d'atteinte du seuil prédéfini ;
- en améliorant la robustesse de l'algorithme de recherche de l'excitation critique ;
- en étudiant la possibilité de rajouter une contrainte au problème d'optimisation afin que les excitations critiques soient plus représentatives de signaux sismiques naturels c'est-à-dire à bande assez large.

Références

- [1] AFPS (Association Française du génie ParaSismique), Recommandations AFPS 90 pour la rédaction des règles relatives aux ouvrages et installations à réaliser dans les régions sujettes aux séismes, Presses de l'École nationale des Ponts et Chaussées, 1990
- [2] A. D'Ambrisi, M. Mezzi, Reliability of non-linear responses to generated accelerograms, 11th European Conference on Earthquake Engineering, Balkema, 1998
- [3] N. Shome, Probabilistic seismic demand analysis of non-linear structures, Ph.D. Dissertation of Stanford University, 1999
- [4] A. Preumont, The generation of non-separable artificial earthquake accelerograms for the design of nuclear power plants, Nuclear Engineering and Design 88 (1985)

- [5] A.A. Pirasteh, J.L. Cherry, R.J. Balling, The use of optimization to construct critical accelerograms for given structures and sites, *Earthquake engineering and structural dynamics* 16 (1988) 597–673
- [6] I. Takewaki, A new method for non-stationary random critical excitation, *Earthquake engineering and structural dynamics* 30 (2001) 519–535
- [7] A. Sarkar, Linear stochastic dynamical system under uncertain load: Inverse reliability analysis, *J. Engineering Mechanics* 129(6) (2003) 665–671
- [8] O. Ditlevsen, H.O. Madsen, *Structural Reliability Methods*, John Wiley & Sons, Chichester, 1996
- [9] Y. Zhang, A. Der Kiureghian, Two improved algorithms for reliability analysis Proceedings of 6th IFIP WG 7.5 working conference on reliability and optimization of structural systems, R. Rackwitz, G. Augusti, A. Borri (ed.), 1994, pp. 297–304
- [10] S.K. Au, J.L. Beck, First excursion probabilities for linear systems by very efficient importance sampling. *Probabilistic Engineering Mechanics* 16 (2001) 193–207
- [11] A. Der Kiureghian, The geometry of random vibrations and solutions by FORM and SORM, *Probabilistic Engineering Mechanics* 15 (2000) 81–90
- [12] A. Assire, Y. Pons, J.M. Proix, Calcul transitoire élastoplastique d'une ligne de tuyauterie sous chargement sismique et permanent. Comparaison avec l'approche réglementaire de dimensionnement, Actes du 6^e Colloque National AFPS, 2003
- [13] *Code_Aster*, Code pour l'Analyse des Structures et Thermo-mécanique pour des Études et des Recherches, logiciel libre sous licence GPL (GNU General Public License) développé par EDF R&D, www.code-aster.org