

Mise en évidence par la méthode des caustiques du déplacement résiduel hors plan induit par les déformations plastiques

OCTAVIAN POP^a, VALÉRY VALLE ET MARIO COTTRON

Laboratoire de Mécanique des Solides, UMR 6610, Université de Poitiers, S.P. 2 M.I., Bd. Marie et Pierre Curie, Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

Reçu le 20 février 2004, accepté le 2 juillet 2004

Résumé – Associé à des singularités mathématiques, le phénomène optique des caustiques représente l'ensemble des valeurs singulières de la projection d'une sous-variété lagrangienne de l'espace de phases (i.e. système de rayon) sur l'espace de configurations défini par le champ des déplacements. Dans ce cas, en supposant que la transition entre le domaine élastique et le domaine plastique qui entoure la pointe de fissure se fait par un changement de la configuration du champ de déplacements, nous nous proposons d'analyser les modifications que cela entraîne dans la formation des caustiques.

Mots clés : Caustiques / singularité optique / déformations plastiques / enclave plastique / fissure / plasticité

Abstract – **Caustic study of the residual out-of-plane displacements induced by the plastic strains.** The optical phenomenon of caustics, associated to mathematical singularities, represents the assembly of singular values due to the projection of a Lagrangian sub-variety of phase's space on the space of configurations defined by the field of displacements. Assuming, that the transition between the elastic zone and the plastic zone, developed in the vicinity of the crack point, is accompanied by topological changes of the residual field of displacements, we propose to study the geometrical shape of the caustic curve, involved by these changes.

Key words: Caustics / optical singularity / plastic strains / crack / plasticity / plastic zone

1 Introduction

En mécanique de la rupture, la connaissance de la morphologie de l'enclave plastique et de ses limites de développement permet de prévenir la propagation des fissures qui peut conduire à des ruptures catastrophiques.

Nous supposons que pour une fissure au départ stationnaire, celle-ci commence à se propager une fois que de la zone plastique atteint une taille critique. En sachant que l'apparition, puis le développement d'une enclave plastique en pointe de fissure induisent des changements topologiques au niveau du champ de déplacements, nous nous proposons de montrer l'influence de ces changements sur le phénomène de caustiques.

Pour les structures fissurées, la morphologie du domaine qui entoure la pointe de la fissure dépend généralement des états de contraintes et de déformations.

Ces deux états sont à leur tour caractérisés par l'interaction entre la géométrie de la pièce et la charge appliquée [1]. Lors de la sollicitation, l'apparition des déformations plastiques importantes dans les structures ductiles peut être expliquée par une résistance structurale à la séparation supérieure à celle du glissement. Il faut préciser que dans certaines conditions (baisse de la température ou croissance de la vitesse de déformation) la résistance au glissement devient supérieure à celle de la séparation (ces aspects seront pris en compte lors de la fissuration des éprouvettes).

2 Analyse du champ des déplacements

Pour un milieu fissuré (Fig. 1), élastique linéaire et isotrope, une première approximation du champ des déplacements autour de la pointe de fissure peut être obtenue en écrivant l'équation de compatibilité à l'aide d'une fonction d'Airy écrite sous forme d'une série polynomiale [2].

^a Auteur correspondant :
Octavian.Pop@lms.univ-poitiers.fr

Nomenclature

u_{zz}	Déplacement suivant l'axe Oz	mm
ν	Coefficient de Poisson	
E	Module d'Young	MPa
K_I	Facteur d'intensité de contraintes	$\text{MPa}\cdot\text{mm}^{-1/2}$
r	Vecteur de position	
σ	Contrainte	MPa
$\Psi_{xx,yy}^I(\phi)$	Fonction dépendante de la direction de mesure	
D^{caust}	Diamètre des caustiques	mm
z_0	Distance initiale entre le plan image et la surface de l'éprouvette	mm
$d(z)$	Distance entre le plan image et la surface de l'éprouvette	mm
C^{op}	Constante d'ombre optique	MPa^{-1}
e	Épaisseur de l'éprouvette	mm

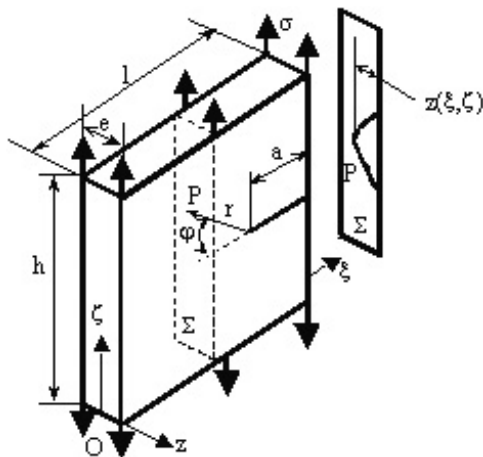


Fig. 1. Éprouvette SEN sollicitée en mode I.

Pour les éprouvettes fissurées ayant une certaine épaisseur [3] et sollicitées en mode I, l'existence d'un état de contraintes planes généralisé va entraîner des déplacements hors plan (relation (1)) suivant une direction perpendiculaire à la surface de l'éprouvette (direction Oz , Fig. 1) [1].

$$u_{zz} = -\frac{\nu}{E} \cdot \int_0^{e/2} \left\{ \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot [\Psi_{xx}^I(\varphi) + \Psi_{yy}^I(\varphi)] \right\} \cdot dz + \frac{\nu}{E} \cdot \int_0^{e/2} \sigma \cdot dz \quad (1)$$

Dans cette relation le terme K_I représente le facteur d'intensité des contraintes, et il dépend de la géométrie de l'éprouvette et du système de chargement [1]. Le terme $\Psi_{xx(yy)}(\varphi)$ représente une fonction dépendante

de la direction de mesure exprimée en fonction de l'angle φ [4].

Il est à noter que la zone de prédominance de la solution asymptotique (Éq. (1)) dépend fortement des paramètres géométriques de l'éprouvette. De plus, il faut préciser que la théorie élastique se limite au premier terme des développements limités, et admet au voisinage du front de la fissure, des contraintes infinies que l'élasticité linéaire rejette.

3 Analyse du champ des déplacements par la méthode des caustiques

Définie dans la géométrie plane comme la développée de l'anticaustique d'une courbe plane réfractante, la caustique obtenue dans l'optique géométrique peut être associée à des singularités mathématiques dites lagrangiennes.

Pour une éprouvette fissurée soumise à un chargement extérieur, le gradient des contraintes crée une déformation en bout de la fissure (l'effet Poisson) et modifie l'indice de réfraction du milieu étudié.

Dans ces conditions, un faisceau lumineux parallèle incident à la surface de l'éprouvette sera dévié par réfraction ou réflexion selon la méthode de mesure utilisée (par réflexion ou par transmission [5]). L'enveloppe de ces rayons déviés, obtenue dans un plan image distant de $d(z)$ par rapport à la surface de l'éprouvette, se présente sous la forme d'une couronne lumineuse, la caustique.

Nous savons que pour un comportement purement élastique du milieu fissuré, après la décharge, celui-ci revient à son état initial. Dans cette situation, l'espace de configurations est réduit à une surface plane, ce qui se traduit par l'absence des caustiques dans le plan image.

Dans le cadre de cette hypothèse, l'apparition d'une enclave plastique dans la proximité du fond de la fissure est accompagnée de déformations irréversibles (résiduelles). Dans ces conditions, pour une profondeur de l'espace des configurations différente de zéro, nous avons des caustiques résiduelles dues à des déformations plastiques résiduelles.

Il faut préciser que pour un milieu ductile, la topologie du champ résiduel des déplacements dépend généralement de l'histoire de chargement.

4 Résultats et discussions

Pour l'analyse expérimentale nous utilisons des éprouvettes de type SEN réalisées en polycarbonate (Makrolon®) et sollicitées en traction selon le mode I. Les dimensions géométriques des éprouvettes, comme il est montré à la figure 1, sont : $l = 60$ mm, $h = 103$ mm, $e = 6$ mm et $a = 9$ mm.

Les caractéristiques matérielles utilisées dans notre démarche et spécifiques pour le Makrolon® sont : $E = 1947$ MPa, $\nu = 0,4$ et le seuil d'élasticité $\sigma_{el} = 47,7$ MPa [6].

Comme il est montré à la figure 2, où nous avons représenté le montage expérimental, les éprouvettes sont éclairées en lumière parallèle au moyen d'une source LASER. Le système optique noté, à la figure 2, par S. O., permet d'obtenir un champ parallèle élargi sur une zone d'environ 20–25 mm de diamètre.

L'acquisition des caustiques se fait en réflexion, grâce à une camera CCD dans plusieurs plans de mesures définis « positive », par rapport à la surface réfléchissante de l'éprouvette [5].

Pour un état chargé de l'éprouvette, les caustiques virtuelles enregistrées pour un déplacement « positif » du plan image de 1,5 ; 7 et 25 cm, sont données à la figure 3. En analysant la figure, nous pouvons observer un changement de la forme des caustiques en fonction du plan de mesure, qui est caractéristique des variations de la forme géométrique du champ des déplacements.

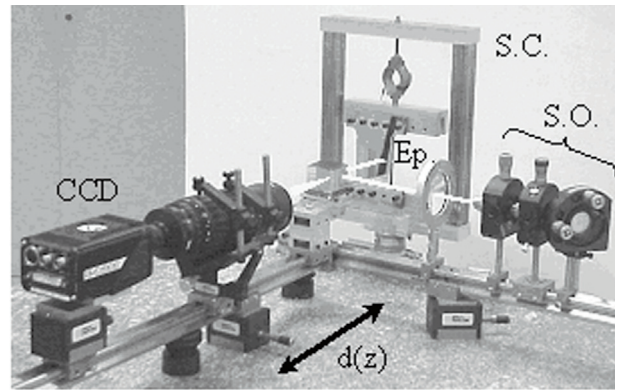
Après le déchargement de l'éprouvette, les caustiques résiduelles visualisées, pour les mêmes plans de mesures, sont représentées à la figure 4.

La présence des caustiques résiduelles est caractéristique, comme nous l'avons déjà précisé, des déformations plastiques irréversibles accompagnées le plus souvent d'une translation algébriquement « positive » du seuil initial d'élasticité.

Il faut rappeler que les faisceaux lumineux générant la caustique sont tous issus du champ de déplacements se situant bien à l'intérieur de la zone éclairée [4].

La variation des diamètres des caustiques résiduelles visualisées en fonction du plan de mesure est représentée à la figure 5. Nous pouvons remarquer que, même dans le plan « 0 » de mesure (le plan « 0 » coïncide avec la surface de l'éprouvette), nous avons des caustiques résiduelles.

Pour un comportement élastique, compte tenu de la loi classique du retard optique, de l'expression d'Eikonal [7]



S.O. – Système Optique
S.C. – Système de Chargement
Ep. – Éprouvette

Fig. 2. Montage expérimental.

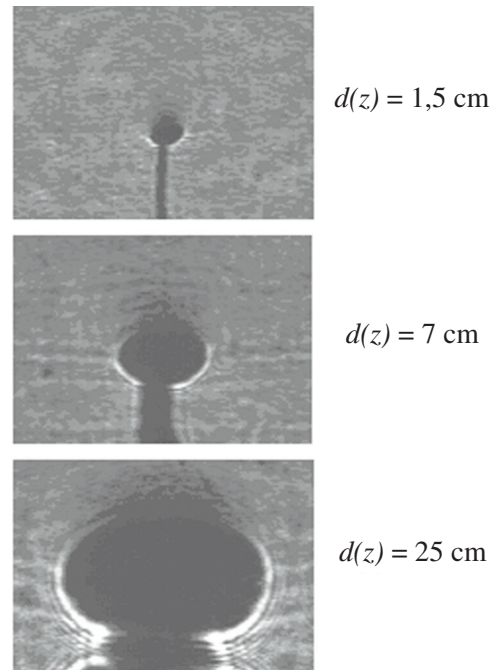


Fig. 3. Caustiques obtenues expérimentalement par réflexion. Caustiques enregistrées pour un état chargé de l'éprouvette.

et de la relation (1) on obtient la forme analytique des diamètres des caustiques suivant l'axe $O\zeta$ [5].

$$\text{Jacobian}(\phi_\xi, \phi_\zeta) \equiv 0 \Rightarrow D^{\text{caust}} = 2,825 \cdot \left[\frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot |z_0 \pm d(z)| \cdot |C^{\text{op}}| \cdot e \right]^{2/5}$$

$$C^{\text{op}} = \frac{2 \cdot \nu}{E} \quad (2)$$

En supposant que, dans une région lointaine de la pointe de fissure, le comportement du matériau reste élastique, nous pouvons observer, comme il est montré à la figure 6 (la région B), une bonne coïncidence entre les diamètres des caustiques enregistrées expérimentalement et les diamètres calculés par la relation (2).

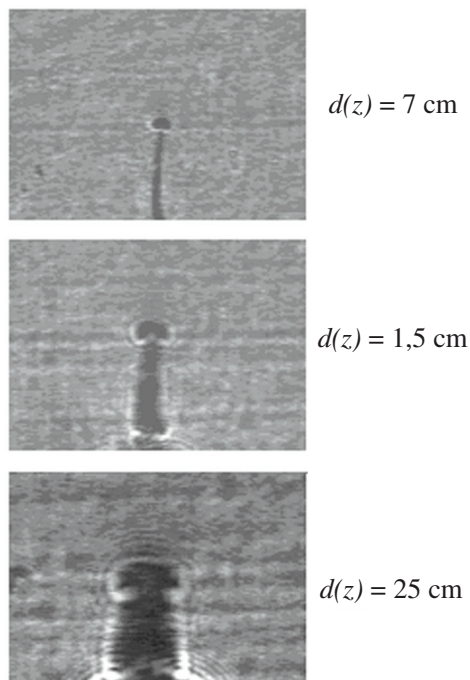


Fig. 4. Caustiques obtenues expérimentalement par réflexion. Caustiques résiduelles enregistrées pour un état non-chargé de l'éprouvette.

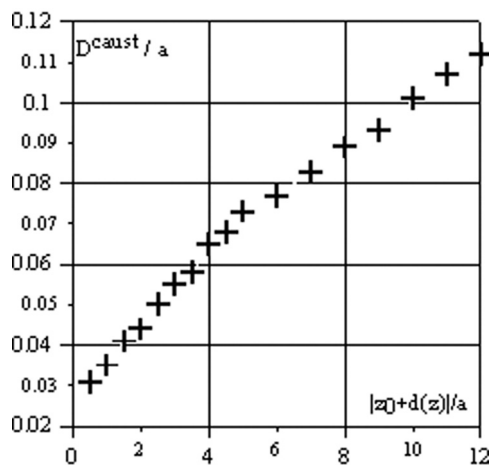


Fig. 5. Évolution du diamètre des caustiques résiduelles en fonction de la position du plan image.

En raison d'une forte concentration des contraintes dans la proximité de la pointe de fissure, le comportement du milieu n'est plus élastique [3, 8]. Et dans cette situation, comme il est montré à la figure 6 (la région A), l'évolution des diamètres mesurés expérimentalement ne suit plus l'évolution « élastique » donnée par la relation (2).

5 Conclusions

Méthode optique de mesure sans contact, la méthode des caustiques permet de mettre en évidence l'existence

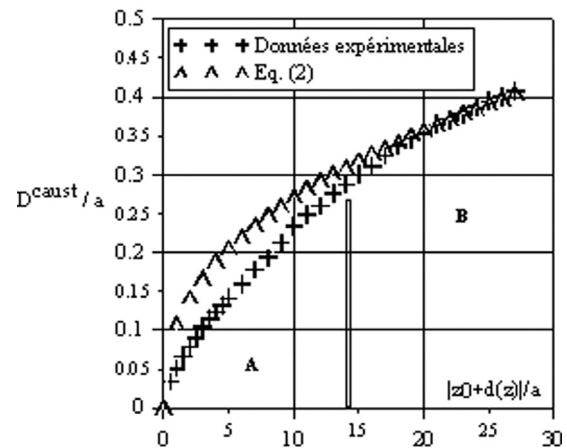


Fig. 6. Étude comparative entre l'évolution du diamètre de caustiques obtenues expérimentalement (pour un état chargé de l'éprouvette) et l'évolution du diamètre calculé analytiquement (Éq. (2)).

d'un champ des déplacements hors plan dans la proximité de la pointe de fissure.

De plus, pour un milieu ductile fissuré dans un état non chargé avec une histoire de chargement au-delà de la limite d'élasticité, la méthode des caustiques rend compte du champ résiduel des déplacements.

En sachant que l'apparition d'une enclave plastique dans le voisinage de la pointe de fissure entraîne un changement de la morphologie de l'espace de configurations, nous pouvons observer (Figs. 3 et 4) que la transition entre cette enclave et la zone à comportement élastique se traduit par une variation de la forme des caustiques.

À partir d'un ensemble de caustiques enregistrées dans différents plans images, nous pouvons envisager de reconstituer le champ résiduel des déplacements afin de délimiter la zone de plasticité.

Références

- [1] D. Cioclov, *Mecanica ruperii materialelor*, ed. Academiei Romane, Bucarest, vol. I, 1976
- [2] N. Recho, *Rupture par fissuration des structures*, Éditions Hermès, Paris, 1995
- [3] R. Labbens, *Introduction à la mécanique de la rupture*, Éditions Pluralis, 1980
- [4] D. Miannay, *Mécanique de la rupture*, Les éditions de physique-EDP Sciences, 1995
- [5] J.F. Kalthoff, *Static and dynamic photoelasticity and caustic*, Recent developments, CISM Courses and lectures 290 A. Lagarde (ed.) Springer-Verlag, Wien-New York, 1987, pp. 421–427
- [6] R. Tié Bie, J.C. Dupré, *Optical techniques for the thermomechanic study of polymers*, International Workshop on Video – Controlled Materials Testing, Nancy, France, 2000, pp. 181–184
- [7] M. Born, E. Wolf, *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation. Interference and diffraction of light*, Pergamon Press, 1980
- [8] T.L. Anderson, *Fracture mechanics*, CRC Press, 1995