

Réalisabilité d'un modèle non-linéaire de la corrélation pression-température

SAMIRA GAALICHE^a, MOUNIR BOUZAIANE ET TAIEB LILI

Département de Physique, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire, 2092 El Manar, Tunisie

Reçu le 28 juin 2004, accepté le 29 juillet 2005

Résumé – Dans ce travail, nous proposons un modèle non-linéaire de retour à l'isotropie de la corrélation pression-température suivant un développement à ordre cinq du tenseur anisotrope de Reynolds \bar{b} . Ce modèle est un essai d'extension du modèle récent de Chung et Kim pour la corrélation pression-déformation. L'étude de stabilité des états d'équilibre d'une turbulence homogène évoluant en l'absence de gradients moyens, conduit à une condition simple sur l'un des coefficients du modèle proposé. De plus, une étude de réalisabilité est effectuée. Nous montrons qu'une condition suffisante de réalisabilité du modèle proposé est obtenue en exprimant ses coefficients en fonction de ceux du modèle de la corrélation pression-déformation. Enfin, une simulation numérique sur la base de résultats de simulation numérique directe de Iida et Kasagi a montré que le modèle proposé assure une meilleure prédiction de la turbulence thermique par rapport au modèle classique de Rotta.

Mots clés : Retour à l'isotropie / corrélation pression-température / stabilité des points fixes / réalisabilité

Abstract – In this work, we propose a non linear model for the return to isotropy term of the pressure-temperature correlation as a development of a fifth power of the Reynolds stress anisotropy \bar{b} . This model is an essay of extension of the recent model of Chung & Kim that is retained for the slow pressure-strain correlation. The study of the stability of the equilibrium states of a homogeneous turbulence, in the absence of mean gradients, leads to a simple condition on one of the coefficients of the proposed model. Moreover, a study of realisability has been developed. We demonstrate that a sufficient condition of realisability of the proposed model is obtained when its coefficients are expressed according to those of the pressure-strain correlation model. Finally, a numerical simulation on the basis of the direct simulation results of Iida & Kasagi, has shown that the proposed model ensures a better prediction of the thermal turbulence with respect to Rotta's classic model.

Key words: Return to isotropy / pressure-temperature correlation / fixed point stability / realisability

1 Introduction

La modélisation de la corrélation pression-température est une deuxième étape dans la modélisation des corrélations faisant intervenir les fluctuations de pression. Les modèles développés la dernière décennie pour la corrélation pression-déformation n'ont pas connu, à notre connaissance, une telle extension aux phénomènes thermiques. Launder et al. [1], Shih et Lumley [2] et Launder [3] ont développé des modèles de corrélation pression-température en parfaite cohérence avec leurs modèles des corrélations pression-déformation. Les modèles de corrélation pression-déformation plus récents n'ont pas bénéficié, pour la plupart, d'une extension

aux phénomènes thermiques. Dans un travail précédent, nous avons proposé une formulation de la corrélation pression-température [4] en cohérence avec le modèle de retour à l'isotropie de la corrélation pression-déformation de Sarkar et Speziale [5].

Dans cet article, nous développons un modèle de retour à l'isotropie de la corrélation pression-température [6, 7], en vue de décrire la décroissance d'une turbulence homogène, initialement anisotrope, associée ou non à un gradient moyen de vitesse.

Nous présentons, à la section 2 le modèle de Chung et Kim que nous retenons pour le terme de retour à l'isotropie de la corrélation pression-déformation, ainsi que le modèle que nous proposons pour le terme de retour à l'isotropie de la corrélation pression-température. La section 3 est consacrée à une étude de stabilité des points fixes

^a Auteur correspondant : sgaaliche@yahoo.fr

associés au modèle. À la section 4, une étude de réalisabilité du modèle est effectuée en vue de dégager des conditions à imposer aux constantes de ce modèle. À la section 5, nous comparons les résultats déduits du modèle proposé à ceux obtenus à partir du modèle classique. La dernière section comporte une conclusion au travail présenté dans cet article.

2 Modèle de retour à l'isotropie proposé pour la corrélation pression-température

Nous nous proposons d'étudier le retour à l'isotropie d'une turbulence homogène, à grands nombres de Reynolds, initialement anisotrope, évoluant sans gradient de vitesse et présentant ou non un gradient moyen de température. Une telle turbulence est décrite, dans le cadre d'une modélisation conventionnelle au second ordre, par les équations exactes de transport des corrélations doubles. Il s'agit des équations d'évolution des tensions de Reynolds $\overline{u_i u_j}$, des flux thermiques turbulents $\overline{u_i \theta}$ et de la variance de la température $\overline{\theta^2}$:

$$\frac{d}{dt} \overline{u_i u_j} = \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\theta u_i} = \phi_{i\theta} + P_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\theta^2} = P_\theta - 2\varepsilon_\theta \quad (3)$$

où u_i et θ sont respectivement les fluctuations de vitesse et de température, $P_{i\theta}$ et P_θ sont les termes de production dus au gradient moyen de température $T_{,k}$:

$$\begin{aligned} P_{i\theta} &= -\overline{u_i u_k} T_{,k} \\ P_\theta &= -2\overline{\theta u_k} T_{,k} \end{aligned} \quad (4)$$

ϕ_{ij} et $\phi_{i\theta}$ sont les corrélations pression-déformation et pression-température, ρ est la masse volumique :

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &= -\frac{\overline{p}}{\rho} (\overline{u_{i,j}} + \overline{u_{j,i}}) \\ \phi_{i\theta} &= -\frac{\overline{p}}{\rho} \overline{\theta_{,i}} \end{aligned} \quad (5)$$

et enfin ε_{ij} , $\varepsilon_{i\theta}$ et ε_θ sont les termes de dissipation dus aux effets moléculaires :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \nu \overline{u_{i,k} u_{j,k}} \\ \varepsilon_{i\theta} &= (\alpha + \nu) \overline{u_{i,k} \theta_{,k}} \\ \varepsilon_\theta &= \alpha \overline{\theta_{,k} \theta_{,k}} \end{aligned} \quad (6)$$

ν est la viscosité cinématique et α la diffusivité thermique du fluide considéré.

À grands nombres de Reynolds et de Péclet, l'isotropie du processus de dissipation conduit simplement à $\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$ et $\varepsilon_{i\theta} = 0$.

Le problème central de la modélisation du retour à l'isotropie d'une turbulence homogène consiste en la modélisation des corrélations pression-déformation ϕ_{ij} et pression-température $\phi_{i\theta}$. Pour représenter la partie de retour à l'isotropie de la corrélation ϕ_{ij} , nous retenons le modèle de Chung et Kim [8] :

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &= \left(2 + C'_1 - \frac{1}{7} (15C'_1 - 2C_2) II_b \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{14} (3C'_1 + C_2) (10III_b - 9II_b^2) \right) b_{ij} - \left(C_2 - \frac{9}{14} (3C'_1 \right. \\ &\quad \left. + C_2) (5II_b - 4III_b) \right) \left(b_{ik} b_{kj} - \left(\frac{II_b}{3} \right) \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

où C'_1 et C_2 sont deux constantes : $C'_1 = 2$ et $C_2 = 19,5(1 - \frac{5}{Re_t})$ [8]. En effet, ce modèle non-linéaire est très intéressant puisqu'il tient compte de l'effet du nombre de Reynolds turbulent $Re_t = \frac{4k^2}{9\nu\varepsilon}$ (ε est le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente $k = \frac{\overline{u^2}}{2}$). Il satisfait les conditions générales de réalisabilité et traduit de manière satisfaisante l'essentiel des effets non-linéaires mis en évidence expérimentalement et caractérisant le retour à l'isotropie d'une turbulence homogène [8].

Dans ce travail, et dans le but d'assurer la cohérence avec le modèle non-linéaire de Chung et Kim retenu pour traduire l'anisotropie cinématique et en vue d'une meilleure description des effets non-linéaires du retour à l'isotropie, nous proposons un modèle du terme de retour à l'isotropie de la corrélation pression-température suivant un développement à l'ordre cinq du tenseur d'anisotropie \vec{b} ($b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{q^2} - \frac{\delta_{ij}}{3}$).

À grands nombres de Reynolds et de Péclet, nous retenons \vec{b} et $\overline{u\theta}$ comme arguments tensoriels pour ce modèle qui se présente alors sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \phi_{i\theta} &= \frac{-\varepsilon}{q^2} \left(\alpha_1 \overline{\theta u_i} + (\alpha_2 b_{ij} + \alpha_3 b_{ij}^2 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_4 b_{ij}^3 + \alpha_5 b_{ij}^4 + \alpha_6 b_{ij}^5) \overline{\theta u_j} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ et α_6 sont des scalaires dépendant a priori des invariants indépendants qui peuvent être construits à partir de \vec{b} et $\overline{u\theta}$.

Appliquons à cette formulation le théorème de Cayley-Hamilton.

D'après ce théorème, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} b^3 &= \frac{1}{2} II_b b + \frac{III_b}{3} I \\ b^4 &= \frac{1}{2} II_b b^2 + \frac{III_b}{3} b \\ b^5 &= \frac{1}{2} II_b b^3 + \frac{III_b}{3} b^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Ces relations permettent d'écrire $\phi_{i\theta}$ sous la forme :

$$\phi_{i\theta} = -\frac{\varepsilon}{q^2} \left[\alpha_1 \overline{u_i} + \left[\left(\alpha_2 + \frac{1}{2} II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4} \alpha_6 II_b^2 \right) b_{ij} + \left(\alpha_3 + \frac{1}{2} \alpha_5 II_b \alpha_6 \frac{III_b}{3} \right) b_{ij}^2 + \frac{1}{6} \alpha_6 II_b III_b + \alpha_4 \frac{III_b}{3} \right] \overline{\theta u_j} \right] \quad (10)$$

ou encore :

$$\phi_{i\theta} = -\frac{\varepsilon}{q^2} (\alpha'_1 \overline{\theta u_i} + (\alpha'_2 b_{ij} + \alpha'_3 b_{ij}^2) \overline{\theta u_j}) \quad (11)$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= \alpha_1 + \alpha_4 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{6} \alpha_6 II_b III_b \\ \alpha'_2 &= \alpha_2 + \frac{1}{2} II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4} \alpha_6 II_b^2 \\ \alpha'_3 &= \alpha_3 + \frac{1}{2} \alpha_5 II_b + \frac{1}{3} \alpha_6 III_b \end{aligned} \quad (12)$$

À ce stade, il importe de chercher les points fixes du système différentiel des équations d'évolution prenant en compte le modèle proposé (10) et d'étudier la stabilité de tels points fixes.

3 Étude de stabilité des points fixes du système différentiel des équations d'évolution

Nous nous proposons maintenant d'étudier le retour à l'isotropie d'une turbulence homogène initialement anisotrope évoluant en l'absence de gradients moyens de vitesse et de température et plus précisément, de déterminer les états asymptotiques d'équilibre d'une telle turbulence. L'étude concernant le champ cinématique a été effectuée par Chung et Kim [8]. Il reste à envisager une étude analogue relative au champ thermique. Pour ce faire, nous retenons les invariants scalaires sans dimensions $M_1 = \frac{\overline{\theta u_i \theta u_i}}{q^2 \overline{\theta^2}}$, $M_2 = \frac{b_{ij} \overline{\theta u_i \theta u_j}}{q^2 \overline{\theta^2}}$ et $M_3 = \frac{b_{ij}^2 \overline{\theta u_i \theta u_j}}{q^2 \overline{\theta^2}}$ pour représenter le champ thermique.

Il s'agit maintenant d'écrire les équations d'évolution de M_1 , M_2 et M_3 . En l'absence de gradient moyen de température, et compte tenu du modèle (10) proposé pour $\phi_{i\theta}$, ces équations sont déduites des équations d'évolution de $\overline{\theta u_i}$, b_{ij} , $\overline{\theta^2}$ et q^2 qui s'écrivent sous les formes :

$$\frac{d\overline{\theta u_i}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{q^2} \left[\alpha_1 \overline{u_i} + \left[\left(\alpha_2 + \frac{1}{2} II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4} \alpha_6 II_b^2 \right) b_{ij} + \left(\alpha_3 + \frac{1}{2} \alpha_5 II_b + \alpha_6 \frac{III_b}{3} \right) b_{ij}^2 + \frac{1}{6} \alpha_6 II_b III_b + \alpha_4 \frac{III_b}{3} \right] \overline{\theta u_j} \right] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{ij}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{q^2} \left[\left(C'_1 - \frac{1}{7} (15C'_1 - 2C_2) II_b + \frac{3}{14} (3C'_1 + C_2) (10III_b - 9II_b^2) \right) b_{ij} \right. \\ &\quad \left. - \left(C_2 - \frac{9}{14} (3C'_1 + C_2) (5II_b - 4III_b) \right) \left(b_{ij}^2 - \frac{1}{3} II_b \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{d\overline{\theta^2}}{dt} = -2\varepsilon_\theta \quad (15)$$

$$\frac{dq^2}{dt} = -2\varepsilon \quad (16)$$

Elles conduisent aux équations d'évolution suivantes de M_1 , M_2 et M_3

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{d\tau} &= 2 \left[\left(1 + r - \alpha_1 - \alpha_4 \frac{III_b}{3} - \frac{1}{6} \alpha_6 II_b III_b \right) M_1 \right. \\ &\quad \left. - \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4} \alpha_6 II_b^2 \right) M_2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\alpha_3 + \frac{1}{2} \alpha_5 II_b + \alpha_6 \frac{III_b}{3} \right) M_3 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_2}{d\tau} &= - \left[\left(\frac{1}{3} II_b \alpha_2 - \frac{3}{14} (3C'_1 + C_2) (5II_b - 4III_b) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\alpha_3 + \frac{1}{2} \alpha_5 II_b + \alpha_6 \frac{III_b}{3} \right) III_b \right] M_1 \\ &\quad - \left[\left(C'_1 - \frac{1}{7} (15C'_1 - 2C_2) II_b + \frac{3}{14} (3C'_1 + C_2) (10III_b - 9II_b^2) \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(-1 - r + \alpha_1 + \alpha_4 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{6} \alpha_6 II_b III_b \right) \right] M_2 \\ &\quad - \left[\left(C_2 - \frac{9}{14} (3C'_1 + C_2) (5II_b - 4III_b) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4} \alpha_6 II_b^2 \right) \right] M_3 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_3}{d\tau} &= -2 \left[\left(C_2 - \frac{9}{14} (3C'_1 + C_2) (5II_b - 4III_b) \right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_2 - \frac{1}{2} II_b \alpha_4 - \alpha_5 \frac{III_b}{3} - \frac{1}{4} \alpha_6 II_b^2 \right] III_b \\ &\quad + IV_b \left(\alpha_3 + \frac{1}{2} \alpha_5 II_b + \alpha_6 \frac{III_b}{3} \right) M_1 \\ &\quad - \frac{2}{3} II_b \left(\alpha_2 - \frac{9}{14} (3C'_1 + C_2) (5II_b - 4III_b) \right) M_2 \\ &\quad - 2 \left[-1 - r + \alpha_1 + \left(\frac{\alpha_4}{3} + \frac{\alpha_6}{3} II_b \right) III_b + C'_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{7} (15C'_1 - 2C_2) II_b + \frac{3}{14} (3C'_1 + C_2) (10III_b - 9II_b^2) \right] M_3 \end{aligned} \quad (19)$$

de Chung et Kim (7) pour ϕ_{ij} et le modèle proposé (10) pour $\phi_{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{dD_{11}}{dt} = & -2\varepsilon\theta\overline{u_1^2} - \varepsilon\theta^2 \left[\left(C'_1 - \frac{1}{7}(15C'_1 - 2C_2)II_b \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{14}(3C'_1 + C_2)(10III_b - 9II_b^2) \right) b_{11} \right. \\ & \left. - \left(C_2 - \frac{9}{14}(3C'_1 + C_2)(5II_b - 4III_b) \right) \left(b_{11}^2 - \frac{1}{3}II_b \right) \right] + 2\theta\overline{u_1} \frac{\varepsilon}{q^2} \\ & \times \left[\left(\alpha_1 + \alpha_4 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{6}\alpha_6 II_b III_b \right) \overline{\theta u_1} \right. \\ & \left. + \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4}\alpha_6 II_b^2 \right) b_{11} \overline{\theta u_1} \right. \\ & \left. + \left(\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_5 II_b + \frac{1}{3}\alpha_6 III_b \right) b_{11}^2 \overline{\theta u_1} \right] \quad (33) \end{aligned}$$

qui s'écrit de manière synthétique sous la forme suivante :

$$\frac{dD_{11}}{dt} = AM + B \quad (34)$$

où A et B sont des fonctions compliquées des invariants $II_b, III_b, \overline{I_D}, \overline{II_D}$ et des constantes numériques C'_1, C_2 et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$.

Et si nous imposons la condition $\frac{d}{dt}D_{11} \geq 0$, quand $D_{11} = 0$, nous obtenons

$$AM + B \geq 0 \quad (35)$$

où les coefficients A et B sont de la forme :

$$\begin{aligned} A = & \left[-2r_e + 2 \left(\alpha_1 + \alpha_4 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{6}\alpha_6 II_b III_b \right) \right. \\ & \left. - \left(C'_1 - \frac{1}{7}(15C'_1 - 2C_2)II_b + \frac{3}{14}(3C'_1 + C_2)(10III_b - 9II_b^2) \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{3} - \overline{I_D} \right) \left(C_2 - \frac{9}{14}(3C'_1 + C_2)(5II_b - 4III_b) \right) \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{2}{3} - \overline{I_D} \right) \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4}\alpha_6 II_b^2 \right) \right. \\ & \left. 2 \left(\frac{1}{9} - II_b - \frac{\overline{I_D}}{3} + \overline{II_D} \right) \left(\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_5 II_b + \alpha_6 \frac{III_b}{3} \right) \right] \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & \varepsilon\theta^2 \left[\frac{1}{3} \left(C'_1 - \frac{1}{7}(15C'_1 - 2C_2)II_b \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{14}(3C'_1 + C_2)(10III_b - 9II_b^2) \right) \right. \\ & \left. - \frac{2}{9} \left(C_2 - \frac{9}{14}(3C'_1 + C_2)(5II_b - 4III_b) \right) \right] \quad (37) \end{aligned}$$

Une analyse de la quantité B , à travers le diagramme de réalisabilité de Lumley [11] (voir annexe), a montré que son signe dépend du coefficient C_2 du terme de retour à l'isotropie de la corrélation pression-déformation et elle

est positive pour la valeur optimale de C_2 . Une condition suffisante de la réalisabilité est alors obtenue lorsqu'on a :

$$B > 0 \quad \text{et} \quad A = 0 \quad (38)$$

En considérant la base formée des invariants indépendants $\overline{I_D}$ et $\overline{II_D}$, A peut se mettre sous la forme $A = A_0 + A_1 \overline{I_D} + A_2 \overline{II_D}$, ce qui nous ramène à la condition $A_0 = A_1 = A_2 = 0$.

Nous obtenons dans ces conditions le système algébrique suivant :

$$\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_5 II_b + \alpha_6 \frac{III_b}{3} = 0 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \left(C_2 - \frac{9}{14}(3C'_1 + C_2)(5II_b - 4III_b) \right) \\ & - 2 \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4}\alpha_6 II_b^2 \right) \\ & - \left(\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_5 II_b + \alpha_6 \frac{III_b}{3} \right) = 0 \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2r_e + 2 \left(\alpha_1 + \alpha_4 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{6}\alpha_6 II_b III_b \right) \\ & - \left(C'_1 - \frac{1}{7}(15C'_1 - 2C_2)II_b \right. \\ & \left. + \frac{3}{14}(3C'_1 + C_2)(10III_b - 9II_b^2) \right) \\ & + \frac{1}{3} \left(C_2 - \frac{9}{14}(3C'_1 + C_2)(5II_b - 4III_b) \right) \\ & + \frac{4}{3} \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4}\alpha_6 II_b^2 \right) \\ & + 2 \left(\frac{1}{9} - II_b \right) \left(\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_5 II_b + \alpha_6 \frac{III_b}{3} \right) = 0 \quad (41) \end{aligned}$$

qui se ramène à la forme suivante si (40) est introduite dans (41) et (41) dans (42)

$$\begin{aligned} & \alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_5 II_b + \alpha_6 \frac{III_b}{3} = 0 \\ & \alpha_2 + \frac{1}{2}II_b \alpha_4 + \alpha_5 \frac{III_b}{3} + \frac{1}{4}\alpha_6 II_b^2 = \\ & - \frac{1}{2} \left(C_2 - \frac{9}{14}(3C'_1 + C_2)(5II_b - 4III_b) \right) \\ & \alpha_1 + \alpha_4 \frac{III_b}{3} + \alpha_6 \frac{1}{6}II_b III_b = \\ & r_e + \frac{1}{2} \left(C'_1 - \frac{1}{7}(15C'_1 - 2C_2)II_b \right. \\ & \left. + \frac{3}{14}(3C'_1 + C_2)(10III_b - 9II_b^2) \right) \quad (42) \end{aligned}$$

Nous devons signaler ici que les membres gauches de ces trois égalités représentent les coefficients α'_3, α'_2 et α'_1

du troisième, deuxième et premier terme de la forme (11) proposée pour la corrélation pression-température et nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\alpha'_3 &= 0 \\ \alpha'_2 &= -\frac{1}{2} \left(C_2 - \frac{9}{14} (3C'_1 + C_2) (5II_b - 4III_b) \right) \\ \alpha'_1 &= r_e + \frac{1}{2} \left(C'_1 - \frac{1}{7} (15C'_1 - 2C_2) II_b \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{14} (3C'_1 + C_2) (10III_b - 9II_b^2) \right) \quad (43)\end{aligned}$$

Et la nouvelle expression du modèle proposé pour $\phi_{i\theta}$ se présentera sous la forme :

$$\begin{aligned}\phi_{i\theta} &= -\frac{\varepsilon}{q^2} \left[r_e + \frac{1}{4} \left(C'_1 - \frac{1}{7} (15C'_1 - 2C_2) II_b \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{14} (3C'_1 + C_2) (10III_b - 9II_b^2) \right) \overline{\theta u_i} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(C_2 - \frac{9}{14} (3C'_1 + C_2) (5II_b - 4III_b) \right) b_{ij} \overline{\theta u_j} \right] \quad (44)\end{aligned}$$

où $C'_1 = 2$ et $C_2 = 19,5 \left(1 - \frac{5}{Re_{ct}} \right)$ [8].

Le résultat obtenu est à notre sens intéressant. Il permet d'exprimer les coefficients du terme de retour à l'isotropie de la corrélation pression-température en fonction des coefficients du terme de retour à l'isotropie de la corrélation pression-déformation de Chung et Kim [8], sans avoir recours à l'optimisation numérique des coefficients de ce modèle. Nous comparons à la section suivante les résultats prédits par le modèle de Chung et Kim étendu aux phénomènes thermiques, à ceux des simulations numériques directes de Iida et Kasagi [12] d'une part, et à ceux relatifs au modèle classique de Rotta [13] d'autre part.

5 Présentation des résultats

Nous commençons par présenter les résultats relatifs au champ cinématique. Nous nous proposons de comparer les évolutions des grandeurs turbulentes (composantes $\overline{u_2^2}$ et $\overline{u_3^2}$ du tenseur de Reynolds et énergie cinétique turbulente k) prédites par le modèle de Chung et Kim aux résultats de simulation numérique directe (SND) de Iida et Kasagi [12]. Sont présentées aussi les évolutions prédites par le modèle classique de Rotta [13]. La simulation numérique de l'écoulement étudié [12] est effectuée en utilisant la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre partant de conditions initiales isotropes.

Sur les figures 1a et 1b, nous représentons respectivement les évolutions temporelles des composantes $\overline{u_2^2}$ et $\overline{u_3^2}$ du tenseur de Reynolds. Nous pouvons remarquer que, contrairement aux résultats de simulation utilisant le modèle de Chung et Kim pour ϕ_{ij} montrant une bonne concordance avec les résultats de SND de Iida et Kasagi,

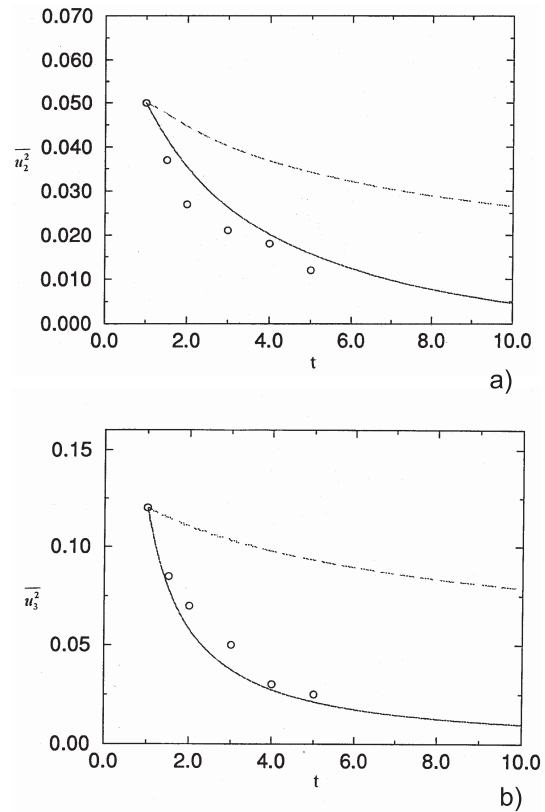


Fig. 1. Évolution de la composante du tenseur de Reynolds $\frac{u_2^2}{u_2^2}$ a). Évolution de la composante du tenseur de Reynolds $\frac{u_3^2}{u_3^2}$ b). o Simulation numérique directe de Iida et Kasagi; — modèle de Chung et Kim; -- modèle de Rotta.

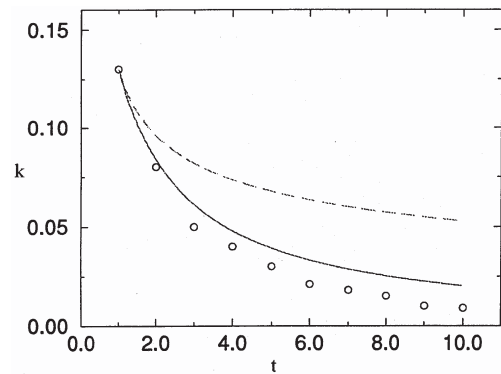


Fig. 2. Évolution de l'énergie cinétique turbulente k . o Simulation numérique directe de Iida et Kasagi; — modèle de Chung et Kim; -- modèle de Rotta.

les résultats de simulation utilisant le modèle classique de Rotta présentent des écarts nets par rapport aux résultats de Iida et Kasagi. La figure 2 présente l'évolution de l'énergie cinétique turbulente k en fonction du temps. Nous observons que le modèle de Chung et Kim montre là aussi un meilleur accord avec les résultats de simulation numérique directe [12].

Nous allons présenter maintenant les résultats de simulation numérique utilisant la forme finale (44) du modèle de retour à l'isotropie de la corrélation

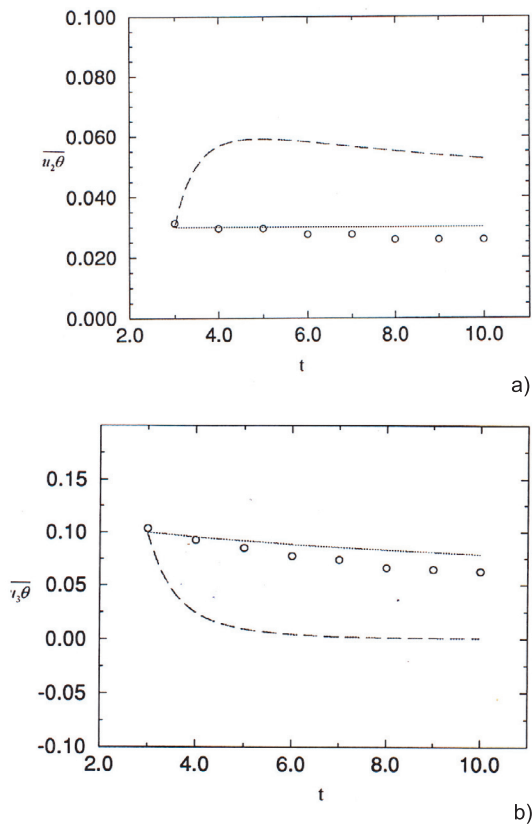


Fig. 3. Évolution de la composante $\overline{u_2\theta}$ du flux thermique turbulent a). Évolution de la composante $\overline{u_3\theta}$ du flux thermique turbulent b). o simulation numérique directe de Iida et Kasagi : ... modèle proposé : -- modèle de Rotta.

pression-température que nous avons proposé et les valeurs optimales des coefficients C'_1 et C_2 [8]. Les figures 3a et 3b montrent l'évolution des flux thermiques turbulents $\overline{u_2\theta}$ et $\overline{u_3\theta}$ en fonction du temps t . Les résultats de simulation utilisant le modèle proposé sont en très bon accord avec les résultats de simulation numérique directe [12] ; des écarts nets sont par contre observés sur ces figures entre les résultats de simulation numérique utilisant le modèle de Rotta [13] et les résultats de simulation numérique directe [12]. Le modèle proposé montre alors une nette amélioration par rapport aux résultats du modèle classique de Rotta.

6 Conclusion

Nous avons proposé dans cette étude un modèle non-linéaire de retour à l'isotropie de la corrélation pression-température en parfaite cohérence avec le modèle non-linéaire de Chung et Kim de la corrélation pression-déformation. À travers une représentation tensorielle isotrope de cette corrélation en fonction du tenseur d'anisotropie \vec{b} et du vecteur flux thermique turbulent $\overline{u\theta}$, nous avons pris l'option d'inclure dans ce modèle des termes d'ordre inférieur ou égal à cinq par rapport au tenseur \vec{b} , en vue de permettre la possibilité de prise en compte directe des effets non-linéaires de la turbulence.

Par la suite, l'essentiel de cette contribution a consisté à dégager les contraintes qu'il y a lieu d'imposer au modèle.

Nous avons commencé à la section 3 par examiner la stabilité des points fixes d'une turbulence initialement anisotrope évoluant en l'absence de gradients moyens. Nous avons montré l'existence d'un seul point fixe qui correspond à des valeurs nulles de trois scalaires indépendants M_1, M_2 et M_3 construits à partir du tenseur d'anisotropie \vec{b} et du vecteur flux thermique turbulent $\overline{u\theta}$. La condition de stabilité de cette solution est assurée par une condition simple sur un coefficient du modèle proposé (44).

En ce qui concerne la réalisabilité des flux thermiques turbulents qui a fait l'objet de la section 4, nous avons suivi la démarche de Lumley [11] en introduisant le concept général de réalisabilité par l'intermédiaire d'un tenseur positif \vec{D} construit à partir du tenseur de Reynolds, du vecteur flux thermique turbulent et de la variance de la température. Nous avons pu déterminer une condition suffisante de réalisabilité du modèle proposé en exprimant ses coefficients en fonction des deux coefficients du modèle de retour à l'isotropie de la corrélation pression-déformation et sans avoir recours à une nouvelle optimisation des coefficients.

La section 5 a été consacrée à la présentation des résultats déduits de ce modèle comparés à ceux des simulations numériques directes de Iida et Kasagi d'une part, et à ceux obtenus par le modèle classique d'autre part.

Le modèle proposé a conduit à des résultats qui, comparés aux données de simulations numériques directes de Iida et Kasagi [12], montrent une nette amélioration de la prédiction des flux thermiques turbulents par rapport au modèle classique de Rotta [13].

Annexe

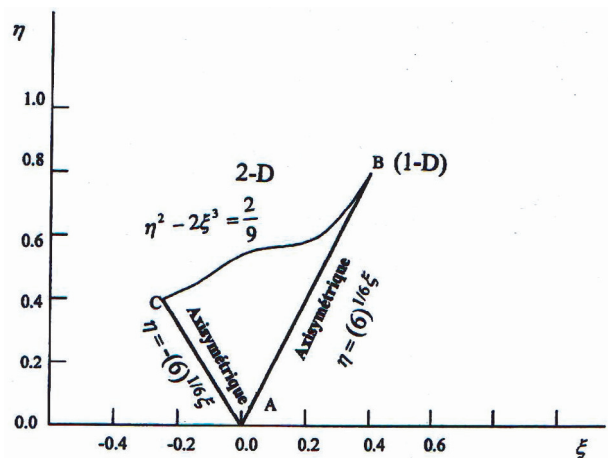


Fig. A.1. Diagramme de réalisabilité de Lumley ($\eta = II_b^{1/2}$, $\xi = III_b^{1/3}$).

Les épreuves n'ont pas été relues par les auteurs.

Références

- [1] B.E. Launder, G. Reece, W. Rodi, Progress in the development of a Reynolds stress closure, *J. Fluid Mech.* 68 (1975) 537
- [2] T.H. Shih, J.L. Lumley, Modeling of pressure correlation terms in Reynolds stress and scalars flux equation, Report No FDA-85-3, Cornell University, 1985
- [3] B.E. Launder, Topics in Applied Physics, P. Bradshaw (éd.), 12, 1976
- [4] M. Bouzaiane, T. Lili, Réalisabilité d'un schéma non-linéaire de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient d'un scalaire, Société Tunisienne de Physique, Hammamet, mars 1995, pp. 267–272
- [5] S. Sarkar, C.G. Speziale, A simple non-linear model for the return to isotropy in turbulence, *Phys. Fluids A* 2 (1990) 84
- [6] M. Bouzaiane, S. Gaaliche, T. Lili, Réalisabilité d'un modèle non-linéaire de la corrélation pression-température, 16^e Congrès Français de Mécanique, Nice, 1–5 septembre 2003
- [7] S. Gaaliche, M. Bouzaiane, T. Lili, Extension du modèle de Chung et Kim, à la corrélation pression-température : Étude de réalisabilité, 4^{es} Journées Tunisiennes sur les Écoulements et les Transferts, Hammamet, 21–23 décembre 2002
- [8] M.K. Chung, S.K. Kim, A non linear return-to-isotropy model with Reynolds number and anisotropy dependency, *Phys. Fluids* 7 June 1995
- [9] G.R. Newman, B.E. Launder, J.L. Lumley, Modeling the behaviour of homogeneous scalar turbulence, *J. Fluid Mech.* 111 (1981) 217
- [10] U. Shumann, Realisability of Reynolds-stress turbulence models, *Phys. Fluids* 20 (1977) 721–728
- [11] J.L. Lumley, Computational modelling of turbulent flows, *Adv. Appl. Mech.* 18 (1978) 123
- [12] O. Iida, N. Kasagi, 9th Symposium Turbulent Shear Flows, Kyoto, Japan, August 16–18, 1993
- [13] J.C. Rotta, Statistische theorie nichthomogener turbulenz, I. Mitteilung, *Z. Phys.* 129 (1951) 547