Influence des caractéristiques mécaniques sur la propagation des ondes de déformations linéaires dans les ressorts hélicoïdaux

SAMI AYADI ET EZZEDDINE HADJ-TAÏEB^a

U. R. : Mécanique des fluides Appliquée et Modélisation, Enis, BP W, 3038 Sfax, Tunisie

Reçu le 9 juin 2005, accepté le 7 juillet 2006

Résumé – Dans cet article, on étudie numériquement la propagation des ondes de déformations linéaires dans les ressorts hélicoïdaux dues à un chargement axial. La modélisation mathématique consiste en un système linéaire de deux équations aux dérivées partielles de type hyperbolique représentant les équations de quantité de mouvement du ressort. Les méthodes numériques des caractéristiques et des différences finies de Lax-Wendroff sont utilisées pour la résolution de ce système. Les résultats obtenus ont permis d'examiner la propagation des ondes de déformations et de vitesses axiales et angulaires et d'analyser leurs évolutions en différentes sections du ressort. Pour valider la fiabilité de cette modélisation, les résultats issus de ces deux méthodes ont été confrontés avec succès à la solution analytique du problème étudié. Pour mettre en évidence l'influence des caractéristiques mécaniques du ressort sur l'évolution de ces ondes, différents matériaux ont été considérés. On a constaté que deux ressorts, constitués de deux matériaux différents, peuvent avoir le même comportement dynamique comme ils peuvent avoir un comportement dynamique différent.

Mots clés : Ressort hélicoïdal / comportement dynamique / déformation / méthode des caractéristiques / méthode de Lax-Wendroff / matériaux

Abstract – **Influence of mechanical characteristics on the wave propagation of linear deformations in helical springs.** In this paper, we numerically study the wave propagation of linear deformations in helical spring due to an axial loading. The mathematical formulation is constituted of a system of two linear, hyperbolic, partial differential equations which are the equations of the spring motion. The problem has been solved by the method of linear characteristics and the finite difference conservative scheme of Lax-Wendroff. The obtained results permitted to examine the wave propagation of the extensional and rotational strains and speeds and to analyze their evolutions in different sections of the spring. To validate the reliability of the presented model, the computed results of the two numerical techniques have been successfully compared with the analytic solution of the studied problem. The purpose of this study is to investigate the influence of the mechanical properties of the spring on the evolution of these waves. The results show that two springs, made up of two different materials, can have either the same dynamic behaviour or a different one.

Key words: Helical spring / dynamic response / deflection / method of characteristics / method of Lax-Wendroff / material

1 Introduction

De nombreux ressorts sont sollicités à des fréquences assez élevées ou très élevées. Dans le cas d'un fonctionnement dynamique à haute fréquence, les charges appliquées à une extrémité d'un ressort ne sont pas transmises instantanément jusqu'à l'autre. Ce retard engendre des phénomènes vibratoires que l'on peut parfois mettre à profit mais qui sont le plus souvent

indésirables [1]. Les ressorts, évidemment destinés à se déformer sous charge, sont fondamentalement différents des autres pièces mécaniques. Il est souhaitable qu'ils soient aussi peu déformables que possible.

On peut distinguer plusieurs catégories de ressort selon les matériaux utilisés [2]. Dans certaines industries, aéronautiques, accessoires sportifs etc., les alliages légers sont de plus en plus utilisés. La question qui se pose est de savoir comment se comportent de tels ressorts sous chargement axial.

^a Auteur correspondant : Ezzed.Hadj@enis.rnu.tn

Nomenclature

F	force axiale (N)	c_f	célérité rapide (m.s^{-1})
T	couple axial (mN)	c_s	célérité lente (m.s^{-1})
u	déplacement axial (m)	a, b, c, e	coefficients constants
v	déplacement angulaire (m)	u_x, v_x, u_t, v_t	valeurs inconnues
θ	angle de rotation autour de l'axe x	P, Q, R, S, L	point de calcul d'interpolation
r	rayon du ressort (m)	F et H	fonctions vectorielles
x	coordonnée axiale (m)	W	vecteur inconnu
t	temps (s)	Δx	pas d'espace (m)
h	longueur du ressort (m)	N	nombre de section
E	module d'Young (GPa)	Δt	pas de temps (s)
ν	coefficient de Poisson	λ_k	valeurs propres
ε	déformation axiale	B	matrice carrée (8×8)
β	déformation angulaire (rad)	I	matrice identité
M	masse du ressort (kg)	n	nombre de spires
α	angle de l'hélice (rad)	r_f	rayon du fil (m)
r	rayon des spires (m)	Δ	raccourcissement (m)
I	moment quadratique (m^4)	ϕ_1	fonction d'excitation

Quand un ressort hélicoïdal est soumis à un choc de chargement, de considérables oscillations peuvent s'y produire [3].

Les études concernant la propagation des ondes de déformations élastiques dans les ressorts hélicoïdaux sont assez rares [4]. Elles ont été développées par Phillips et Costello [5] et Costello [6] pour le cas linéaire, et par Sinha et Costello [7], pour le cas non-linéaire. Dans le cas linéaire, la réponse dynamique des ressorts hélicoïdaux sous chargement axial a été établie par application de la transformation de Laplace. Les solutions analytiques sont présentées sous forme de courbes temporelles indiquant l'évolution des déformations axiale et angulaire et de l'expansion. Toutefois, ces solutions n'ont été tracées qu'au niveau de l'extrémité soumise au chargement. D'autre part, les exemples traités ne concernent que les ressorts en acier. Dans cet article, on étudie numériquement le comportement dynamique linéaire d'un ressort hélicoïdal sous chargement axial. L'évolution des déformations et des vitesses, en différentes sections du ressort, est examinée. La résolution numérique est menée par deux méthodes; la méthode des caractéristiques avec interpolation et la méthode des différences finies conservatives de Lax-Wendroff. Les résultats numériques obtenus, à l'aide de ces deux méthodes, sont confrontés à la solution analytique développée par ces auteurs. On examine, en particulier, l'influence des caractéristiques mécaniques du ressort (module d'Young, coefficient de Poisson et densité) sur l'évolution des déformations en différentes sections de celui-ci.

2 Formulation mathématique

Pour établir les équations du comportement dynamique du ressort, Phillips et Costello [5] ont appliqué l'analyse dimensionnelle, la théorie générale de flexion et de torsion des fils minces et les formules élémentaires de

la résistance des matériaux. En considérant un élément du ressort, soumis à une force axiale F et un couple axial T (Fig. 1a), les équations de mouvement de cet élément s'écrivent :

Résultante axiale suivant x :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

Moment axial suivant x :

$$b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

où u est le déplacement axial, $v = r\theta$ est le déplacement angulaire, θ est l'angle de rotation autour de l'axe x , r est le rayon du ressort, x est la coordonnée axiale et t est le temps.

En petites déformations ($|\varepsilon| \ll 1$, $|\beta| \ll 1$), les coefficients a , b et c sont des constantes qui expriment la variation de la force F et du couple T par rapport aux déformations ε et β . Le coefficient e représente la masse du ressort. D'après Sinha et Costello [7], on a :

$$a = \frac{r^2}{EI} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \left(1 - \frac{\nu}{1+\nu} \cos^2 \alpha\right) \sin \alpha \quad (3)$$

$$b = \frac{r^2}{EI} \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{r}{EI} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = -\frac{\nu}{1+\nu} \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (4)$$

$$c = \frac{r}{EI} \frac{\partial T}{\partial \beta} = \left(1 - \frac{\nu}{1+\nu} \sin^2 \alpha\right) \sin \alpha \quad (5)$$

$$e = \frac{Mr^2}{EIh} \quad (6)$$

où h est la hauteur du ressort comprimé, E est le module d'Young, ν est le coefficient de Poisson, $\varepsilon = \partial u / \partial x = u_x$ est la déformation axiale, $\beta = \partial v / \partial x = r \partial \theta / \partial x = v_x$ est la déformation angulaire, M est la masse du ressort, α est l'angle de l'hélice, r est le rayon des spires et I est le moment quadratique. Dans ces conditions, les équations (1)

a. Élément ressort

b. Déformation statique d'un ressort hélicoïdal

Fig. 1. Description du ressort hélicoïdal.

et (2), décrivent le comportement dynamique linéaire du ressort.

3 Méthodes numériques de résolution

Le système des deux équations aux dérivées partielles (1) et (2) étant de type hyperbolique, il peut être résolu numériquement par deux méthodes : la méthode des caractéristiques [8] et la méthode de Lax-Wendroff. La méthode des caractéristiques, basée sur les célérités de propagation des ondes, est appliquée pour obtenir des équations différentielles ordinaires dont l'intégration se fait, généralement, par des algorithmes numériques [9]. La méthode de Lax et Wendroff [10] est appliquée pour résoudre tout système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques écrit sous forme conservative.

3.1 Méthode des caractéristiques

Généralement, les ondes dans le ressort sont engendrées par des discontinuités de fonctionnement (variation de vitesses). Ces discontinuités se propagent et leur

loi de déplacement est représentée dans le plan \$(x, t)\$, par exemple, par des lignes que l'on qualifie de caractéristiques. La détermination de ces lignes peut être obtenue à partir des équations fondamentales (1) et (2) en remarquant que, par définition, ces lignes sont lieu de discontinuité et par conséquent, sur de telles lignes, les dérivées partielles ne sauraient admettre une valeur unique. Cette propriété a été signalée en particulier par Monge et utilisée par Massau [11]. En notant :

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & u_{xt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t}, & v_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ v_{xt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t}, & u_{tt} &= \frac{\partial u_t}{\partial t}, & v_{tt} &= \frac{\partial v_t}{\partial t} \end{aligned}$$

les dérivées partielles vérifient aussi les relations :

$$du_x = u_{xx}dx + u_{xt}dt \quad \text{et} \quad du_t = u_{tx}dx + u_{tt}dt \quad (7a)$$

$$dv_x = v_{xx}dx + v_{xt}dt \quad \text{et} \quad dv_t = v_{tx}dx + v_{tt}dt \quad (7b)$$

Sachant que

$$u_{xt} = u_{tx} \quad \text{et} \quad v_{xt} = v_{tx} \quad (8)$$

le système des équations différentielles du premier ordre constituées par (1), (2), (7a), (7b) et (8) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} a/e & 0 & b/e & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ b/e & 0 & c/e & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_x)_x \\ (u_x)_t \\ (v_x)_x \\ (v_x)_t \\ (u_t)_x \\ (u_t)_t \\ (v_t)_x \\ (v_t)_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ du_x \\ dv_x \\ du_t \\ dv_t \end{bmatrix} \quad (9)$$

La méthode des caractéristiques permet de transformer le système des équations (1) et (2) en un système d'équations différentielles ordinaires qui seront intégrées numériquement suivant les lignes caractéristiques.

Les directions de ces lignes sont obtenues en annulant le déterminant de la matrice carrée \$(8 \times 8)\$ du système d'équations (9). C'est la condition pour que ce système ne soit pas un système de Cramer admettant une solution unique [8]. D'où :

$$\left(\frac{ac - b^2}{e^2} \right) \left(\frac{dt}{dx} \right)^4 - \frac{a + c}{e} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + 1 = 0 \quad (10)$$

qui admet les quatre racines réelles suivantes :

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)_{1,2} = \sqrt{e \frac{(a + c) \mp \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2(ac - b^2)}} \quad (11)$$

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)_{3,4} = -\sqrt{e \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2(ac - b^2)}} \quad (12)$$

Elles correspondent aux quatre pentes des lignes caractéristiques le long desquelles les perturbations se propagent dans le ressort.

On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} c_f &= \left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = \sqrt{\frac{1}{2e} \left[(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right]} \\ &= \sqrt{\frac{EIh}{Mr^2} \sin \alpha} = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{e}} \end{aligned} \quad (13)$$

est la célérité rapide des ondes de déformations angulaires et que

$$\begin{aligned} c_s &= \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 = \sqrt{\frac{1}{2e} \left[(a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right]} \\ &= \sqrt{\frac{EIh \sin \alpha}{Mr^2 (1+\nu)}} = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{e(1+\nu)}} \end{aligned} \quad (14)$$

est la célérité lente des ondes de déformations axiales.

Cette condition étant remplie, pour éviter qu'il y ait impossibilité de résolution du système d'équations, mais seulement indétermination, il faut que les déterminants obtenus en portant la matrice colonne de droite à la place d'une quelconque colonne de la matrice carrée de l'équation (9), soient nuls. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 - c \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \right\} du_x + \left\{ b \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \right\} dv_x \\ &- \left\{ 1 - c \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \right\} \left(\frac{dt}{dx} \right) du_t - \left\{ b \left(\frac{dt}{dx} \right)^3 \right\} dv_t = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

où dt/dx est égal à l'une des quatre racines définies par les relations (11) et (12).

Cette relation donne la loi de fonctionnement ou d'évolution sur les lignes caractéristiques. L'équation de compatibilité (15) peut s'écrire sous forme de différences finies :

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 - c \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \right\} \Delta u_x + \left\{ b \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \right\} \Delta v_x \\ &- \left\{ 1 - c \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \right\} \left(\frac{dt}{dx} \right) \Delta u_t - \left\{ b \left(\frac{dt}{dx} \right)^3 \right\} \Delta v_t = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Comme le montre la figure 2, les valeurs inconnues u_x , v_x , u_t et v_t , en tout point L du ressort, peuvent être obtenues à partir de leurs valeurs aux points P , Q , R et S se trouvant sur les quatre lignes caractéristiques passant par L . Les célérités c_f et c_s étant constantes, les morceaux

Fig. 2. Lignes caractéristiques.

de courbes PL , QL , RL et SL sont droits et l'équation (16) conduit, pour le point P , à :

$$\begin{aligned} &[(u_x)_L - (u_x)_P] \left[1 - c \left(\frac{dt}{dx} \right)_{1,P}^2 \right] + [(v_x)_L \\ &- (v_x)_P] b \left(\frac{dt}{dx} \right)_{1,P}^2 - [(u_t)_L - (u_t)_P] \left[1 - c \left(\frac{dt}{dx} \right)_{1,P}^2 \right] \\ &\times \left(\frac{dt}{dx} \right)_{1,P} - [(v_t)_L - (v_t)_P] b \left(\frac{dt}{dx} \right)_{1,P}^3 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Trois autres équations aux différences finies peuvent être associées aux points Q , R et S . En résolvant le système des quatre équations, ainsi obtenues, on peut déterminer la solution u_x , v_x , u_t et v_t en tout point L du ressort.

3.2 Méthode de Lax-Wendroff

La méthode des différences finies de Lax-Wendroff [10] est un schéma numérique de précision d'ordre deux à deux pas de prédiction et de correction et son application nécessite l'établissement d'une formulation conservative à partir des équations (1) et (2). Cette formulation s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = H(W) \quad (18)$$

où F et H sont deux fonctions vectorielles du vecteur inconnu W .

Le système des équations aux dérivées partielles (1), (2) et (8) étant à coefficients constants, il peut se mettre sous une telle forme avec :

$$W = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \\ v_t \\ v_x \end{pmatrix}, \quad F = - \begin{pmatrix} (a/e) u_x + (b/e) v_x \\ u_t \\ (b/e) u_x + (c/e) v_x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = 0 \quad (19)$$

La méthode de Lax-Wendroff est du type « prédicteur-correcteur » pour laquelle le plan (x, t) est quadrillé par

un réseau de droites orthogonales parallèles aux axes x et t (maillage régulier).

En imposant à la méthode de Lax-Wendroff de discrétiser le système linéaire conservatif (18) avec une précision d'ordre deux et en remplaçant les dérivées partielles par rapport au temps et à l'espace par des expressions aux différences finies, on obtient pour le premier pas ou phase de prédiction :

$$W_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (20)$$

et pour le deuxième pas ou phase de correction :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (21)$$

où $\Delta x = h/N$ est le pas d'espace, N est le nombre de section et Δt est le pas de temps conditionné par le critère de stabilité de Courant Friedrich Lévy :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\max_k |\lambda_k|} \quad (22)$$

Les λ_k sont les valeurs propres de la matrice B qui est telle que $\partial F / \partial x = B \partial W / \partial x$. Dans ces conditions, on aura :

$$B = - \begin{bmatrix} 0 & a/e & 0 & b/e \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/e & 0 & c/e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \det(B - \lambda I) \\ = \lambda^4 - \left(\frac{a+c}{e} \right) \lambda^2 + \frac{ac-b^2}{e^2} = 0$$

En posant $\mu = 1/\lambda$, on trouve :

$$\frac{ac-b^2}{e^2} \mu^4 - \left(\frac{a+c}{e} \right) \mu^2 + 1 = 0 \quad (23)$$

qui admet les quatre racines définies par les relations (11) et (12). Par la suite $\max_k |\lambda_k| = c_f$.

Pour assurer la stabilité et éliminer les petites oscillations dans la solution, des études ont montré [12] qu'il faut utiliser la limite du critère (22). La condition de stabilité s'écrit donc :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{c_f} \quad (24)$$

4 Applications et résultats

Considérons un système ressort hélicoïdal en acier dont les caractéristiques sont d'après [7] :

$h = 48,26$ cm, $\alpha = 0,141815$ rd, $r = 17,932$ cm, nombre de spires $n = 3$, $\nu = 0,29$, rayon du fil $r_f = 1,509$ cm, $E = 206,85$ GPa, $\Delta = 16,51$ cm et $M = 19,146$ kg.

Tableau 1. Vitesse de l'extrémité du ressort $x = 0$.

Temps (ms)	0	3,375	27,75	50,625
Vitesse axiale (m.s ⁻¹)	0	9,062	1,165	-0,3

4.1 Conditions initiales et aux limites

On suppose que le ressort est initialement comprimé d'une distance Δ (voir Fig. 1b). Pour tout $x \in [0, h]$, les conditions initiales sont définies par :

$$u_x(x, 0) = -\Delta/h \quad \text{et} \quad v_x(x, 0) = 0 \quad (25)$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad v_t(x, 0) = 0 \quad (26)$$

Le ressort est soumis à un chargement produisant une vitesse de déplacement axial à l'extrémité $x = 0$ représentée par la fonction $\phi_1(t)$ portée sur la planche 1 et définie par les valeurs indiquées dans le tableau 1.

Les conditions aux limites sont exprimées par :

$$u_t(0, t) = \phi_1(t), \quad v_t(0, t) = 0, \\ u_t(h, t) = 0 \quad \text{et} \quad v_t(h, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (27)$$

Dans ces conditions et par analogie au problème d'évolution des cordes vibrantes, on dit que le problème régi par les équations (1, 2, 25, 26 et 27) est un problème aux limites d'évolution pour les équations des ressorts hélicoïdaux. L'évolution des déformations et des vitesses en toute section du ressort est définie par les conditions initiales, la courbe caractérisant l'excitation variable dans le temps imposée en $x = 0$ et les autres conditions sur les vitesses aux deux extrémités. Pour la résolution numérique, les calculs ont été réalisés avec deux programmes écrits en Fortran l'un basé sur la méthode des caractéristiques (MDC) et l'autre basé sur la méthode de Lax-Wendroff (MLW).

4.2 Validation analytique du modèle numérique

Pour valider le concept de modélisation retenu, nous présentons sur la figure 3 l'évolution des déformations axiale et angulaire à l'extrémité $x = 0$ suite au chargement imposé à cette extrémité. Les résultats issus de la MDC et de la MLW montrent une bonne concordance avec la solution analytique de Sinha et Costello [7].

4.3 Interprétation physique de la propagation des ondes dans le ressort

Les figures 4 et 5 présentent les courbes d'évolution des déformations axiale et angulaire, en fonction du temps, en différentes sections du ressort ($x = 0$, $x = h/4$, $x = h/2$, $x = 3h/4$ et $x = h$). Les figures illustrent les résultats obtenus par la MDC avec un nombre de sections $N = 180$ et par la MLW avec $N = 1000$.

Elles montrent que ces deux méthodes conduisent à des résultats analogues. Toutefois, nous avons constaté

Fig. 3. Comparaison des différentes méthodes de calcul des déformations en $x = 0$.

Fig. 4. Courbes des déformations (méthode des caractéristiques : $N = 180$).

Fig. 5. Courbes des déformations (méthode de Lax-Wendroff : $N = 1000$).

que la MDC ne converge pas lorsque N devient supérieur à 180. Par contre, pour la MLW, le nombre de sections n'est pas limité et la précision est d'autant meilleure que ce nombre est assez élevé.

Comme on peut le voir sur la figure 6, au temps $t = 0$, l'extrémité du ressort $x = 0$ est excitée. Immédiatement, deux ondes de déformations l'une angulaire β et l'autre axiale ε se propagent vers l'extrémité $x = h$ avec deux célérités différentes définies par les expressions (13) et (14) et qui ont pour valeurs $c_f = 30,55 \text{ m.s}^{-1}$ et $c_s = 26,898 \text{ m.s}^{-1}$. Comme le montre les lignes caractéristiques, le temps mis par l'onde β pour atteindre l'extrémité h , est $t = h/c_f = 15,83 \text{ ms}$ et le temps mis par l'onde ε est $t = h/c_s = 17,94 \text{ ms}$.

Lorsque ces deux ondes atteignent cette extrémité, elles se réfléchissent, rebroussement chemin et se propagent vers l'extrémité $x = 0$ du ressort. Puisque les célérités sont constantes, cette étape prend la même durée que celle de l'étape précédente.

Nous constatons aussi que les déformations à l'extrémité $x = 0$, commencent à varier à partir de l'instant 0 (début de l'excitation à cette extrémité). Les résultats des figures 6 et 7 montrent bien le couplage entre les ondes de déformations axiales et les ondes de déformations angulaires. En effet, l'onde de déformation angulaire provoquée en $x = 0$, atteint la section $x = h/2$ à l'instant $t = h/(2c_f) = 7,92 \text{ ms}$. Au temps $t = h/(2c_s) = 8,94 \text{ ms}$, l'onde de déformation axiale arrive à son tour à la section $x = h/2$ où elle perturbe la déformation angulaire (diminution). À l'instant $t = 3,375 \text{ ms}$, la vitesse axiale en $x = 0$ (excitation) change brusquement de pente (déchargement). À cet instant, deux nouvelles ondes de déformations, l'une angulaire rapide et l'autre axiale lente, prennent naissance

dans le ressort. Ceci se traduit sur le diagramme des lignes caractéristiques par deux droites de pentes différentes qui démarrent de la section $x = 0$ à l'instant $t = 3,375 \text{ ms}$. A cet instant, les déformations en $x = 0$ changent de sens de variation (augmentation après diminution).

À l'instant $11,27 \text{ ms}$, la deuxième onde de déformation angulaire rapide atteint la section médiane $x = h/2$. Cette déformation subit alors, en cette section, une deuxième diminution. Puis, c'est au tour de la deuxième onde de déformation axiale qui arrive en $x = h/2$ à l'instant $t = 12,35 \text{ ms}$ entraînant une augmentation des deux déformations axiale et angulaire.

La première onde de déformation angulaire rapide atteint l'extrémité $x = h$ à l'instant $t = h/c_f = 15,83 \text{ ms}$. Au même moment, la déformation angulaire, en cette section, subit une augmentation jusqu'à atteindre la valeur $0,0528$ au temps $t = h/c_s = 17,9 \text{ ms}$ correspondant à l'instant de l'arrivée de la première onde de déformation axiale lente. Elle commence alors à décroître.

À l'instant $t = 19,17 \text{ ms}$, la deuxième onde de déformation angulaire atteint $x = h$. La déformation angulaire subit une diminution de vitesse plus élevée que la première. Au temps $t = 21,32 \text{ ms}$, c'est au tour de la deuxième onde de déformation axiale d'atteindre $x = h$. Les deux déformations commencent alors à augmenter.

La réflexion des ondes de déformation sur l'extrémité fixe du ressort $x = h$, donne naissance à des ondes plus amplifiées que les ondes incidentes. Notons que, l'évolution des amplitudes de ces ondes dépend de l'excitation et des caractéristiques géométriques et mécaniques du ressort. Ces caractéristiques interviennent dans les équations (13) et (14) des deux célérités c_f et c_s .

Après réflexion en $x = h$, les ondes de déformation rebroussement chemin. La première onde de déformation

Fig. 6. Propagation des ondes de déformations dues à une excitation axiale du ressort (MLW).

angulaire arrive de nouveau à la section $x = h/2$ à l'instant $t = 23,75$ ms. Cette déformation commence à croître, devient positive puis atteint la valeur maximale 0,03534 à l'instant $t = 26,83$ ms. À cet instant, elle sera rejointe par la première onde de déformation axiale lente et par la deuxième onde de déformation angulaire rapide. Elle commence à diminuer.

Dans ce cas, on dit qu'il y a eu rattrapage d'ondes (la deuxième onde de déformation angulaire a rattrapé la première onde de déformation axiale). En réalité, le rattrapage d'ondes se produit en une section assez

proche de $x = h/2$; plus précisément $x/h = [2 - (0,003375c_s/h)/(1 - c_s/c_f)] = 0,4264$ et à l'instant $t = 28,23$ ms au lieu de 26,83 ms. Les ondes de déformation atteignent ensuite la section $x = 0$:

- à $t = 31,59$ ms pour la première onde de déformation angulaire (augmentation de β).
- à $t = 34,97$ ms pour la deuxième onde de déformation angulaire (diminution de β).
- à $t = 35,88$ ms pour la première onde de déformation axiale (diminution des deux déformations ε et β avec une pente plus élevée).

Fig. 7. Propagation des ondes de déformations dues à une excitation axiale du ressort (MLW)

- à $t = 39,26$ ms pour la deuxième onde de déformation axiale (les déformations ε et β , en $x = 0$, commencent à augmenter).

De l'analyse précédente, on constate que l'onde de déformation axiale lente a une influence directe sur l'onde de déformation angulaire rapide. Ceci traduit le couplage dynamique représenté par le coefficient b figurant dans les équations de mouvement (1) et (2). Ce couplage est dû au coefficient de Poisson ν et s'annule avec celui-ci.

Comme le montre le diagramme des lignes caractéristiques, la variation de la pente de la vitesse d'excitation, en $x = 0$ et à $t = 27,75$ ms (Tab. 1), produit un troisième couple d'ondes de déformations ε et β . L'onde angulaire β atteint la section $x = h/2$ à l'instant $t = 35,65$ ms et l'onde axiale ε atteint cette section à l'instant $t = 36,72$ ms. Cette dernière provoque une légère variation des courbes de ε et β qui ne peut être observée qu'après une amplification très importante de l'axe des ordonnées des figures 6 et 7. Les interprétations physiques peuvent être poursuivies de cette façon pour expliquer l'évolution des courbes de déformations en toute section du ressort représentées sur ces deux planches.

La figure 8 représente les fluctuations des vitesses de déplacement axial u_t et angulaire v_t aux différentes sections du ressort. Le diagramme des lignes caractéristiques de la figure 6 permet de tirer des interprétations similaires concernant l'évolution de ces vitesses. En l'absence des termes de frottement, on constate que la vitesse axiale maximale est la même pour toutes les sections intérieures du ressort. Elle est égale à celle de l'excitation en $x = 0$, soit $u_t = 9,62 \text{ m.s}^{-1}$. Comme le montrent les figures de cette planche, la réflexion des ondes de vitesses aux deux extrémités du ressort produit des vitesses de signes contraires.

Les réactions du système modélisé, concernant la propagation des ondes de déformations et de vitesses et la réflexion de ces ondes sur les deux extrémités du ressort, fixe en $x = h$ et libre en $x = 0$, de vitesse axiale connue

dans le temps, prouvent, donc, la validité du modèle numérique développé.

Le tableau 2 donne la force axiale, le moment de torsion et l'expansion radiale du ressort, à l'extrémité $x = 0$ et à l'instant $t = 35$ ms. On constate que les valeurs théoriques, fournies par la solution analytique [6, 7], sont en bon accord avec les valeurs numériques issues des deux méthodes de calcul.

4.4 Influence des caractéristiques mécaniques

Examinons enfin trois ressorts constitués de métaux différents (acier, cuivre et aluminium) dont les propriétés mécaniques sont indiquées dans le tableau 3. Les ressorts ont les mêmes caractéristiques géométriques précédentes et sont soumis au chargement décrit dans le tableau 1.

Les deux figures 9 et 10 établissent une comparaison entre les courbes de déformations correspondant à des matériaux différents. Les essais numériques ont été réalisés pour des valeurs différentes du module d'Young : $E = 210 \text{ GPa}$ (acier), $E = 130 \text{ GPa}$ (cuivre) et $E = 69 \text{ GPa}$ (aluminium).

Les résultats montrent l'influence des caractéristiques mécaniques du ressort sur l'allure des courbes des déformations. Il faut noter que les amplitudes des déformations dépendent de l'excitation et des valeurs des célérités indiquées dans le tableau 3. Ces célérités sont exprimées à l'aide des caractéristiques géométriques et mécaniques du ressort (Éqs. (13) et (14)).

Sur les figures de ces deux planches, on note que les amplitudes des fluctuations varient en sens inverse de la célérité des ondes de déformations dans le ressort. En effet, les déformations sont d'autant plus importantes que les célérités sont petites. Ceci s'explique par le fait que, dans ces conditions, les ondes mettent plus de temps pour se propager dans le ressort. Ainsi, les déformations angulaires auront plus de temps pour s'amplifier et ne seront pas rapidement atténuées par les ondes de déformations axiales.

Fig. 8. Évolution des vitesses axiales et angulaires en différentes sections du ressort (MLW).

Tableau 2. Force axiale, moment de torsion et expansion radiale en $x = 0$ et à $t = 0,035$ s.

Méthode	Force axiale (N)	Moment de torsion (mN)	Expansion (mm)
Analytique	-11 040	669,6	-0,998
MDC	-11 100	540,5	-0,950
MLW	-10 700	543,7	-0,973

Tableau 3. Caractéristiques mécaniques du ressort.

Matériau du ressort	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Densité	Masse (kg)	Célérité (m.s^{-1})	
					Rapide	Lente
Acier à ressort	210	0,27	7,8	19,146	30,78	27,31
Cuivre	130	0,29	8,9	21,846	22,64	19,96
Aluminium	69	0,325	2,5	6,136	31,166	26,127

Si l'on examine les figures de ces deux planches, il apparaît que les évolutions des ondes de déformations sont presque similaires lorsque les célérités sont identiques. C'est le cas des ressorts en acier et en aluminium. Par contre, lorsque les célérités sont différentes, comme dans le cas de l'acier et du cuivre ou du cuivre et de l'aluminium, les comportements dynamiques sont différents.

Le tableau 4 donne les déformations maximales axiale et angulaire en $x = 0$; pour les trois ressorts considérés.

5 Conclusion

Pour étudier la propagation des ondes de déformations dans les ressorts hélicoïdaux, nous avons proposé une modélisation numérique basée sur les deux méthodes des caractéristiques et de Lax-Wendroff. Les résultats numériques, de l'exemple étudié et simulé, ont été confrontés aux explications physiques concernant la propagation de ces ondes, leurs réflexions sur les deux extrémités du ressort et leurs couplages dynamiques.

Pour valider la fiabilité du modèle présenté, les résultats numériques obtenus ont été comparés à la solution analytique du problème étudié. Grâce à la cohérence obtenue, nous avons pu non seulement valider le modèle élaboré mais aussi montrer son aptitude pour étudier tout comportement dynamique linéaire du ressort hélicoïdal.

Pour examiner l'influence des caractéristiques du ressort, différents métaux, acier, cuivre et aluminium, ont été considérés. Les résultats montrent, que le comportement dynamique est étroitement lié aux célérités de propagation des ondes de déformations. Ainsi, on constate que deux ressorts, constitués de matériaux différents, peuvent avoir le même comportement dynamique comme ils peuvent avoir un comportement dynamique différent.

Sur le plan numérique, la méthode de résolution n'a guère d'influence sur le phénomène étudié. Toutefois, on peut affirmer l'efficacité de la méthode des caractéristiques pour reproduire convenablement le comportement dynamique linéaire des ressorts hélicoïdaux. Cependant, cette méthode nécessite l'utilisation de

Fig. 9. Comparaison des déformations axiales pour différents métaux.

Fig. 10. Comparaison des déformations angulaires pour différents métaux.

Tableau 4. Déformations maximales en $x = 0$.

	Acier	Cuivre	Aluminium
Déformation axiale	-1,019	-1,230	-1,023
Déformation angulaire	0,0815	0,111	0,0804

l'interpolation linéaire ce qui a, certainement, une incidence négative sur la convergence et la précision du calcul. Par contre, l'étude montre la simplicité, la précision et la souplesse de la méthode de Lax Wendroff.

Physiquement, les résultats de l'exemple traité, par le modèle linéaire, dépassent le domaine des petites déformations. Dans ces conditions, une modélisation numérique plus générale reste à appliquer pour étudier le comportement dynamique non-linéaire du ressort hélicoïdal.

Références

- [1] M.K. Forrester, Stiffness Model of a Die Spring, Thesis of Master Science doctorate, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, 2001
- [2] R.D. Cook, W.C. Young, Advanced Mechanics of Materials, New York, Macmillan Publishing Compagny, 1985
- [3] V.K. Stokes, On the Dynamic Radial Expansion of Helical Springs Due to Longitudinal Impact, J. Sound Vibration 35 (1974) 77
- [4] L. Lindkvist, Three-Dimensional Load-Deformation Relation Ships of Arbitrarily Loaded Coiled Springs, Sweden, Machine and Vehicle Design, Chalmers of Technology, 1995
- [5] J.W. Phillips, G.A. Costello, Large Deflections of Impacted Helical Springs, J. Acoustical Soc. Amer. 51 (1972) 967–972
- [6] G.A. Costello, Radial expansion of impacted helical springs, J. Appl. Mechanics, Trans. ASME 42 (1975) 789–792
- [7] S.K. Sinha, G.A. Costello, The Numerical Solution of the Dynamic Response of Helical springs, Int. J. Numerical Methods in Engineering 12 (1978) 949–961
- [8] M.B. Abott, An introduction to the method of the characteristics, American Elsevier, New York, 1966
- [9] E. Hadj-Taïeb, T. Lili, The numerical solution of the transient two-phase flow in rigid pipelines, Int. J. Numerical Methods in fluids 29 (1999) 501–514
- [10] P.D. Lax, B. Wendroff, Difference scheme for hyperbolic equations with high order of accuracy, Comm. Pure Appl. 17 (1966) 381–398
- [11] Massau, Mémoires intégration graphique des équations aux dérivées partielles, Annales AIG Gand 1900
- [12] A. Lerat, R. Peyret, Sur le choix des schémas aux différences du second ordre fournissant des profils, C. R. Acad. Sc. Paris, septembre 1973, t. 277, pp. 363–366