

Sur la modélisation de la dynamique des fils

ALEXANDRE WATZKY^a

Laboratoire de Mécanique Physique, Université Paris 12 – Val-de-Marne – B²OA UMR 7052 CNRS, Faculté des Sciences & Technologie, 61 avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France

Reçu le 28 août 2008, accepté le 9 avril 2009

Résumé – La dynamique des fils, et en particulier le problème de la « corde vibrante », a de nombreux champs d'application et met en jeu de multiples phénomènes complexes que seule une modélisation rigoureuse en déplacements finis peut faire apparaître. Les difficultés auxquelles on se heurte, avant tout liées à la cinématique, sont celles rencontrées en mécanique des poutres, cadre général dans lequel on se place. Le mouvement étant tridimensionnel, on détaille le paramétrage permettant de rendre compte facilement de la torsion matérielle. On s'attache ensuite à construire les équations du mouvement pour un fil linéairement élastique dont la tension dépend aussi de la torsion. Ces équations exhibent de nombreux couplages dont les mécanismes peuvent être mis en évidence par projection sur les modes spatiaux dans le cas d'extrémités fixes. Le système d'équations modales obtenu fait apparaître des règles de sélection précises portant sur la distribution spatiale des modes, la modulation des parties temporelles n'intervenant qu'en terme d'efficacité sur les couplages.

Mots clés : Fil / câble / corde / verge / vibration / torsion / couplages / non-linéarités

Abstract – **On the dynamics of threads modelisation.** The dynamics of wire rope, and the “vibrating string” problem, is of great interest for numerous applications. It involves multiple complex phenomena which need a rigorous modelization in finite displacements. The difficulties, first arising from the kinematics, are those encountered in the framework of rods mechanics. The motion being three-dimensional, the parametrization which permits to easily describe the material torsion is detailed. The equations of motion are then derived for a linearly elastic thread with a torsion-dependant tension. The couplings exhibited by these equations can be investigated through projection on the spatial modes shapes in the pinned ends case. The obtained system of modal equations shows strict selecting rules based on these spatial shapes, the modulation of the temporal parts only playing an efficiency role in the couplings.

Key words: Yarn / wire rope / string / rod / vibration / torsion / couplings / non-linearities

1 Introduction

Les classiques expériences de Melde ou de Raman, ainsi que de nombreux travaux, notamment en acoustique musicale, montrent que l'équation des ondes, linéaire et découplée, est inapte à décrire les multiples phénomènes dont est le siège une corde vibrante (mouvement tridimensionnel avec prise en compte de la raideur et couplages entre les diverses polarisations). Cette complexité est due à l'intrinsèque non-linéarité du problème [1].

On s'intéresse à la dynamique d'un fil tendu, assimilable à une verge précontrainte dans sa configuration de référence au repos (description lagrangienne), et décrite comme un milieu curviligne dans le cadre des petites

déformations mais en déplacements et rotations finies, dont on construit les équations du mouvement.

2 Cinématique

2.1 Déplacements

On se place en coordonnées cartésiennes dans la base fixe des e_i de l'espace euclidien tridimensionnel où l'on considère un fil tendu au repos entre deux extrémités $z = 0$ et $z = L_0$. Un point initialement en $(0, 0, z)$ se meut en $(x(z, t), y(z, t), z + u(z, t))$ où x et y représentent les déplacements *transversaux* et u le déplacement *axial* (Fig. 1).

^a Auteur pour correspondance :
watzky@univ-paris12.fr

Nomenclature

a	allongement (local)	1
c	célérité	$L.T^{-1}$
K	raideur en extension	$M.L.T^{-2}$
L	longueur du fil	L
r	rayon de giration des sections	L
T	tension	$M.L.T^{-2}$
u	déplacement axial	L
x, y	déplacements transversaux	L
z	abscisse au repos	L
θ	rotation des sections/leur axe	L^{-1}
κ	raideur en torsion	$M.L^{-3}.T^{-2}$
μ_0	masse linéique	$M.L^{-1}$
τ	tension induite par la torsion	$M.L^2.T^{-2}$
$()'$	dérivée de $()$ par rapport à z	$[()] L^{-1}$
$(\dot{})$	dérivée de $()$ par rapport au temps	$[()] T^{-1}$
$O()$	ordre de grandeur	$[()]$
$\delta()$	symbole de Kronecker	1

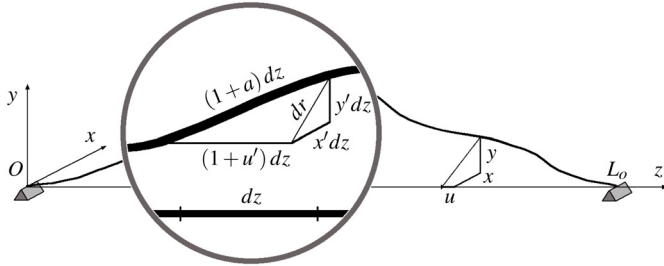


Fig. 1. Cinématique.

2.2 Allongement

La longueur actuelle ds d'une portion de fil de longueur dz au repos est donnée par

$$ds = (1 + a)dz = \sqrt{(1 + u')^2 + x'^2 + y'^2} dz \quad (1)$$

où a est l'allongement local et $()' = d()/dz$.

Des conditions aux limites fixes permettent de considérer les taux de déplacements modérés et, à moins de ne s'intéresser qu'à des mouvements essentiellement axiaux, le développement de l'expression de a , caractéristique des déformations [2] nous amène à considérer le cas

$$O(u') = O(x')^2 = O(y')^2 = O(a) \quad (2)$$

2.3 Transformation de la base liée

Le vecteur unitaire tangent à la ligne moyenne s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3 &= \frac{dz}{ds} [(1 + u') \mathbf{e}_3 + x' \mathbf{e}_1 + y' \mathbf{e}_2] \\ &\approx \left[1 - \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \right] \mathbf{e}_3 + x' \mathbf{e}_1 + y' \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

au premier ordre en a .

Le milieu réel étant tridimensionnel et, pour un élanement important, les sections pouvant être considérées comme restant droites et rigides, elles ont six degrés de liberté et il convient de paramétrer leur rotation afin de décrire les flexion et torsion matérielles. Dans une description comme milieu curviligne, la base de Frenet ne donne accès qu'à des grandeurs purement géométriques et nécessite une correction, et la seule considération des conditions aux limites est insuffisante [3, 4], notamment en dynamique.

On utilise ici une transformation qui tire profit du fait qu'un axe joue un rôle privilégié [5]. Associant au centre des sections la base orthonormée liée des \mathbf{E}_i , le passage de la configuration au repos à la configuration actuelle s'effectue en deux étapes (Fig. 2a) :

- (i) une rotation d'angle φ autour du vecteur unitaire \mathbf{k} amenant le vecteur tangent de \mathbf{e}_3 à \mathbf{E}_3 ;
- (ii) une rotation d'angle θ autour de ce dernier vecteur pour faire tourner la section droite autour de son axe.

Cette transformation à trois paramètres est très générale et l'on notera que ses deux étapes sont permutable (Fig. 2b) sans modifier les valeurs des paramètres.

Si besoin est, \mathbf{k} se détermine à partir des composantes du vecteur tangent \mathbf{E}_3 , exprimées en fonction des déplacements (3), par la relation $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{E}_3 = \mathbf{k} \sin \varphi$.

L'angle φ , tel que $\sin \varphi = dr/ds$, caractérise naturellement la *déflexion*, et l'on montre lors de la condensation des équations du mouvement du milieu tridimensionnel [2], qu'en petites déformations, θ' correspond à la *torsion*, ce qui confère à ces deux paramètres une *signification physique*.

3 Équations du mouvement

3.1 Comportement

Le fil pouvant avoir une structure, les paramètres mécaniques choisis correspondent à des valeurs intégrées sur les sections. Pour un « cylindre » de sections circulaires axisymétriques d'aire A et de moment quadratique I par rapport à leur diamètre, on définit le rayon de giration $r = \sqrt{I/A}$. Le moment quadratique polaire valant $J = 2I$, le moment d'inertie par rapport à l'axe s'écrit $2\mu_0 r^2$ où μ_0 est la masse linéique au repos.

Outre un terme linéairement élastique, le comportement en traction est choisi de sorte à rendre compte de l'allongement (ou de la variation de tension) induit(e) par une torsion dans le cas d'un câble. On introduit alors un coefficient de proportionnalité τ (dont le signe dépend du sens des torons) tel que la tension s'écrive au voisinage de la configuration de référence

$$T = T_0 + Ka - \tau\theta' \quad (4)$$

où $T_0 (> 0)$ est la tension au repos et K la raideur en traction.

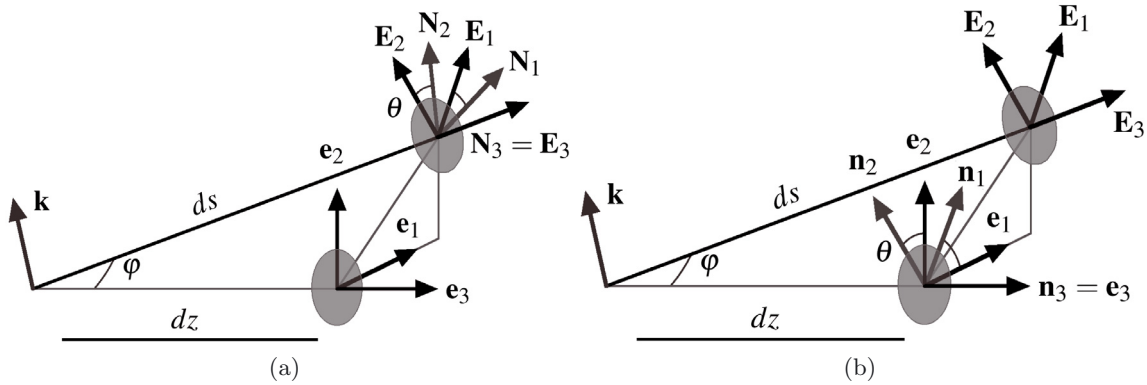


Fig. 2. Paramétrage du mouvement de la base liée aux sections droites.

Notant S_i et M_i les composantes, dans la base liée des E_i , du torseur résultant sur les sections, celles-ci s'expriment en fonction des courbures matérielles, et donc en fonction de nos paramètres cinématiques, sous la forme [2] :

$$\begin{aligned} S_1 &= -k(x'' \cos \theta + y'' \sin \theta)' \\ S_2 &= k(-y'' \cos \theta + x'' \sin \theta)' \\ S_3 &= T \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= k(-y'' \cos \theta + x'' \sin \theta) \\ M_2 &= k(x'' \cos \theta + y'' \sin \theta) \\ M_3 &= C_0 + \kappa \theta' \end{aligned} \quad (5b)$$

où $k = Kr^2$ et κ sont les raideurs en flexion et en torsion, et C_0 un éventuel couple de torsion initial.

3.2 Équations du mouvement

L'équilibre d'une portion de fil est conduit, dans la base fixe des e_i pour les efforts, et suivant le vecteur tangent E_3 pour la torsion – un examen des ordres de grandeurs montre que les équations d'équilibre des moments de flexion se situent à un ordre négligeable, relativement au système :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - c_T^2 x'' - (c_L^2 - c_T^2) \left\{ x' \left[u' + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \right] \right\}' \\ + r^2 c_L^2 x'''' + r^2 c_L^2 (\theta' y''')' + \vartheta^2 (\theta' x')' = F(z, t) \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} - c_T^2 y'' - (c_L^2 - c_T^2) \left\{ y' \left[u' + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \right] \right\}' \\ + r^2 c_L^2 y'''' - r^2 c_L^2 (\theta' x''')' + \vartheta^2 (\theta' y')' = G(z, t) \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\ddot{u} - c_L^2 u'' - \frac{1}{2} (c_L^2 - c_T^2) (x'^2 + y'^2)' + \vartheta^2 \theta'' = H(z, t) \quad (6c)$$

$$\ddot{\theta} - c_\theta^2 \theta'' = Q(z, t) \quad (6d)$$

où les seconds membres sont les éventuelles sollicitations extérieures, $\vartheta^2 = \tau/\mu_0$, et les célérités

$$c_T = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}, \quad c_L = \sqrt{\frac{K}{\mu_0}}, \quad c_\theta = \sqrt{\frac{\kappa}{2\mu_0 r^2}} \quad (7)$$

correspondent respectivement aux ondes transversales dans le cas idéal, aux ondes longitudinales et aux ondes de torsion.

3.3 Couplages

On voit dans le système (6) que la précontrainte en torsion a disparu – elle peut néanmoins jouer un rôle de perturbation – et que les oscillations de torsion régies par (6d) peuvent être calculées indépendamment.

Concernant le mouvement axial, à distinguer du mouvement *longitudinal* tangent au fil, (6c) est une équation des ondes linéaire forcée par les vibrations transversales et de torsion. Ce dernier terme, dû à notre relation de comportement (4) et qui n'apparaît pas pour une corde monofilament, peut rendre invalide la classique hypothèse d'allongement uniforme ($a' = 0$) [6] basée sur le fait qu'en pratique $c_L \gg c_T$. En effet, si dans ce cas, les premiers modes de vibrations transversales ne peuvent exciter efficacement les modes axiaux, il n'en est pas de même pour la torsion où $O(c_L) = O(c_\theta)$.

On retrouve, dans le troisième terme des deux équations (6a), (6b) régissant les vibrations transversales, la non-linéarité causée par la modulation de la tension due à la variation de longueur du fil au cours du mouvement. Ces termes couplent notamment les deux polarisations, rendant instable un mouvement plan. Les deux derniers termes, non-linéaires aussi, montrent l'influence de la torsion : le premier, qui couple encore les deux polarisations

transversales, est dû à la torsion cinématique ; le second à l'allongement induit par le comportement en torsion (4).

4 Équations modales

4.1 Conditions aux limites

Pour des extrémités fixes, les solutions peuvent toujours¹ s'écrire sous la forme

$$w(z, t) = \sum_j w_j(t) \sin \frac{j\pi z}{L_0} \quad (w = x, y, u, \theta) \quad (8)$$

où les parties temporelles sont voisines de (pour les modes axiaux et de torsion, égales à) la solution harmonique dans le cas linéaire, avec une amplitude variable en raison des couplages.

4.2 Équations modales

Multipliant chaque équation de (6) par $\sin(n\pi z/L_0)$ après y avoir injecté les solutions (8) précédentes et intégrant sur la longueur (procédure de Galerkin) [7], on obtient le système d'équations modales pour $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n + \left(\frac{n\pi}{L_0}\right)^2 (1 + Bn^2) c_T^2 x_n + \frac{c_L^2 - c_T^2}{8} \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^4 \\ \times \sum_{i,j,k} \{nij k (x_i x_j + y_i y_j) x_k [\delta(i - j - k \pm n) \\ + \delta(i + j - k \pm n) + \delta(i - j + k \pm n) + \delta(i + j + k - n)]\} \\ + \frac{c_L^2 - c_T^2}{2} \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^3 \sum_{p,k} \{npk u_p x_k [\delta(p - k \pm n) \\ + \delta(p + k - n)]\} - \frac{2}{\pi} r^2 c_L^2 \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^4 \\ \times \sum_{q,k} \left\{ nqk^2 \theta_q y_k \left[\frac{k - q}{n^2 - (k - q)^2} + \frac{k + q}{n^2 - (k + q)^2} \right] \right\} \\ (\text{où } k + q + n \text{ impair}) - \frac{\vartheta^2}{2} \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^3 \\ \times \sum_{q,k} \{nqk \theta_q x_k [\delta(k - q \pm n) + \delta(k + q - n)]\} = f_n(t) \end{aligned} \quad (9b)$$

Pour les y_n , les équations sont les mêmes à condition de permuter les rôles de x_m et y_m et d'inverser le signe de la pénultième ligne,

$$\ddot{u}_n + \left(\frac{n\pi}{L_0}\right)^2 c_L^2 u_n - \frac{c_L^2 - c_T^2}{4} \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^3 \quad (9c)$$

$$\times \sum_{i,j} \{nij (x_i x_j + y_i y_j) [\delta(i - j \pm n) + \delta(i + j - n)]\} \\ - \vartheta^2 \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2 n^2 \theta_n = h_n(t)$$

$$\ddot{\theta}_n + \left(\frac{n\pi}{L_0}\right)^2 c_\theta^2 \theta_n = q_n(t) \quad (9d)$$

où $B = \pi^2 K r^2 / T_0 L_0^2$ rend compte de l'influence de la raideur en flexion (terme dispersif) et δ est le symbole de Kronecker : $\delta(m) = 1$ pour $m = 0$ et 0 sinon.

Le système (9) fait apparaître les mécanismes de couplages, qui mettent notamment en jeu des combinaisons de modes. Celles-ci ne peuvent apparaître avec des modèles monomodes. La plupart de ces interactions sont régies par des règles de sélection précises reposant sur la distribution spatiale des modes. Le plus ou moins bon accord fréquentiel des parties temporelles, qui peuvent en première approximation s'écrire comme des fonctions harmoniques d'amplitude variable, n'intervient qu'en termes d'efficacité sur ces couplages.

5 Discussion

Le modèle présenté repose sur une cinématique tridimensionnelle où un paramétrage astucieux permet facilement, et de manière naturelle pour un corps élancé, de prendre en compte la torsion. Outre la nécessité de la décrire, on montre que ses effets peuvent être importants.

Bien que le comportement linéaire choisi soit rudimentaire, il permet de voir l'influence d'une structure de câble dans la dynamique d'un fil. Il fait notamment apparaître un fort couplage des modes de torsion avec les vibrations axiales, rendant caduque la classique hypothèse d'allongement uniforme, ainsi qu'un couplage supplémentaire avec les vibrations transversales. Dans une telle structure, la raideur en flexion et, dans une moindre mesure en traction, dépendent de la torsion. Cependant la flexibilité supérieure à celle d'un barreau cylindrique peut éventuellement permettre de négliger le terme (linéaire) correspondant ($B = 0$).

Les pertes n'ont pas été considérées. Là encore, outre le frottement avec le milieu ambiant, la structure du câble peut engendrer de la friction interne. Si leur modélisation est difficile, elles ne feront qu'atténuer les phénomènes, sans en modifier les mécanismes.

Enfin, les équations du mouvement montrent des non-linéarités cubiques (type Duffing) et de l'excitation paramétrique (type Mathieu) avec d'innombrables combinaisons possibles. Les premières peuvent se traduire par des sauts d'amplitudes et les secondes par d'éventuels

¹ Pour un corps très élancé, un éventuel encastrement se traduirait par une correction de longueur très faible.

transferts importants entre modes. Si les équations modales semblent inextricables, elles fournissent néanmoins dans certaines situations un outil pour réduire ou amplifier certains couplages.

Références

- [1] S.S. Antman, The equations for large vibrations of strings, *Am. Math. Mon.* 87 (1980) 359–370
- [2] A. Watzky, Non-linear three-dimensional large-amplitude damped free vibration of a stiff elastic stretched string, *J. Sound Vib.* 153 (1992) 125–142
- [3] A.-J.-C. Barré de Saint Venant, Mémoire sur le calcul de la résistance à la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens, *C. R. Acad. Sci. Paris* 17 (1843) 942–954 & 1020–1031
- [4] J.C. Alexander, S.S. Antman, The ambiguous twist of Love, *Q. Appl. Math.* 40 (1982) 83–92
- [5] A. Watzky, Displacement of slender axisymmetric bodies: a convenient change of basis, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 42 (1991) 623–627
- [6] A. Watzky, On the generation of axial modes in the non-linear vibration of strings, *J. Acoust. Soc. Am.* 123, 3659, Acoustics'08 Paris, 29 juin–4 juillet 2008
- [7] A. Watzky, Sur les mécanismes de couplage de modes dans la vibration non linéaire des verges précontraintes, 11^e Congrès Français de Mécanique 5, 65–68, Lille/Villeneuve d'Ascq, 6–10 septembre 1993