

Modélisation numérique du flambage des plaques minces et applications au laminage

SAMI ABDELKHALEK^{1,2,a}, HAMID ZAHROUNI², MICHEL POTIER-FERRY²,
PIERRE MONTMITONNET¹, NICOLAS LEGRAND³ ET PASCAL BUESSLER³

¹ École des Mines de Paris-ParisTech-CEMEF (UMR CNRS 7635), BP 207, 1 rue Claude Daunesse, 06904 Sophia-Antipolis-Cedex, France

² LPMM (UMR CNRS 7554), ISGMP, Université de Paul Verlaine-Metz, Ile de Saulcy, 57045 Metz, France

³ ArcelorMittal Research Maizières, R&D Industrial Operations, BP 30320, Voie Romaine, 57283 Maizières, Les Metz Cedex, France

Reçu le 20 avril 2009

Résumé – Dans certains procédés de mise en forme, tel que le laminage, l'apparition des contraintes résiduelles est inévitable et peut engendrer le flambage qui se traduit en défauts géométriques. Ceci exige la modélisation de ce phénomène d'instabilité mécanique afin de bien définir la forme et l'amplitude de ces défauts. Cela nécessite un modèle complet ayant des capacités pour le calcul du post-flambage. Dans le présent article, on présente un modèle de flambage possédant la faculté de détecter la charge critique de flambage et la forme post-flambée d'une plaque sous contraintes résiduelles. Des applications à des cas académiques et un cas de laminage seront aussi traités.

Mots clés : Laminage / défauts de planéité / flambage / post-flambage / contraintes résiduelles

Abstract – **Thin sheet buckling modeling and applications for strip rolling.** In some material forming processes, as in strip rolling, residual stresses inevitably appear and may resulting buckling which is translated to geometric defects. This requires predicting this mechanical instability phenomenon in order to define defect geometry and amplitude. For that reason, a complete buckling model having a post-buckling computing capability is recommended. In this paper, we present a residual stress buckling plate model which has a critical load and post-buckling computing capability. Several academic applications and a rolling case are treated.

Key words: Rolling / flatness defects / buckling / post-buckling / residual stress

1 Introduction

Dans une structure, la répartition des champs de contraintes résiduelles peut être plus ou moins variable et capable de causer le flambage quand ces contraintes dépassent un certain niveau critique. Les origines de ces contraintes résiduelles sont très variées et on peut citer :

- les origines thermiques où un matériau est soumis à des variations de température sans avoir la possibilité de se dilater ;
- les origines mécaniques quand un matériau subit une déformation plastique hétérogène.

Dans la plupart des procédés de mise en forme, notamment en laminage des tôles minces, le flambage est

incontrôlable et peut avoir des effets néfastes sur la structure. De ce fait, ce phénomène doit être analysé assez profondément afin de comprendre ses causes, pouvoir le modéliser et essayer de l'éviter.

En laminage, lors de l'écrasement de la tôle dans l'emprise, les cylindres de travail subissent une déformation élastique qui est généralement inévitable. Ainsi, la déformation plastique de la tôle à cet endroit n'est pas homogène sur toute la largeur de la table, ce qui engendre l'apparition des contraintes résiduelles d'origine mécanique. En conséquence, le flambage peut avoir lieu, donnant naissance à des ondulations de formes diverses que l'on nomme dans ce contexte « défauts de planéité ». Par ailleurs, un modèle éléments finis 3D basé sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) et une formulation de coque [1] a été développé. Ce modèle doté d'une capacité pour simuler le flambage des coques, nous a permis de modéliser les défauts de planéité en laminage.

^a Auteur pour correspondance :
sami.abdelkhalak@ensmp.fr

D'autre part, il est particulièrement difficile de trouver dans la littérature des études de post-flambement et les auteurs [2,6] se limitent à des calculs de flambage linéaire, c'est-à-dire uniquement à la recherche des modes propres de flambage. Cette carence permettra d'avoir uniquement une idée sur la forme des défauts en laminage et non de les quantifier (en UI par exemple) ou d'observer le comportement de la structure après le flambage sous contraintes résiduelles; particulièrement dans certains cas où on a observé qu'une tôle peut passer d'un mode à un autre au cours du post-flambage.

Dans le présent article, on montrera des applications de flambage de plaques métalliques sous contraintes résiduelles à l'aide d'un modèle ayant des capacités à faire des calculs de post-flambage, en passant par des cas académiques simples à un cas d'application au laminage.

2 Formulation et méthode asymptotique numérique (MAN)

Les équations du problème sont équivalentes à la stationnarité de la fonctionnelle de Hu-Washizu qui s'écrit comme suit :

$$\int_v \{ {}^t \delta S : [(\gamma_u + \tilde{\gamma}) - D^{-1} : S] + {}^t S : [\delta \gamma_u + \delta \tilde{\gamma}] \} \, dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \quad (1)$$

où D est le tenseur des constantes élastiques, S est le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff, γ_u est la déformation compatible de Green-Lagrange obtenue à partir du champ de déplacement u qui est composé d'une partie linéaire et d'une partie quadratique : $\gamma_u = \gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u)$. $\tilde{\gamma}$ est la déformation additionnelle indépendante du déplacement, qui est choisie orthogonale au champ des contraintes, permettant d'éviter le phénomène de verrouillage. $P_e(\delta u)$ est le travail virtuel des efforts extérieurs et λ est un paramètre de chargement.

L'équation (1) peut s'écrire sous forme d'un résidu R comme suit :

$$R(U, \lambda) = L(U) + Q(U, U) - \lambda F(U) = 0 \quad (2)$$

où $L(\cdot)$ et $Q(\cdot, \cdot)$ sont respectivement un opérateur linéaire et quadratique, F est le vecteur des efforts extérieurs.

2.1 MAN pour le suivi de courbe

La MAN consiste à chercher la solution du problème non linéaire (1) sous forme d'un développement asymptotique au voisinage d'une solution initialement connue (U_0, λ_0) selon un paramètre « a » :

$$U(a) = U_0 + \sum_{i=1}^n a^i U_i ; \quad \lambda(a) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^n a^i \lambda_i \quad (3)$$

$$a = \langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0) \lambda_1$$

Ici, a définit la méthode de pilotage et U un vecteur mixte qui peut contenir plusieurs variables ($U = (u, \tilde{\gamma}, S)$). n est l'ordre de troncature des séries.

Si on substitue (3) dans (2), le problème se transforme en une séquence de problèmes linéaires comme on le montre ci-dessous :

à l'ordre 0 on a la solution initiale ;
à l'ordre 1 :

$$L_t^0(U_1) = \lambda_1 F$$

$$\langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_1^2 = 1 \quad (4)$$

ordre p ($1 < p \leq n$) :

$$L_t^0(U_p) = \lambda_p F - \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r})$$

$$\langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \quad (5)$$

$L_t^0(\cdot)$ est l'opérateur tangent qui ne dépend que de la solution initiale.

Les différents problèmes linéaires (4) et (5) sont résolus en utilisant une discrétisation par éléments finis de coques [1] et les termes (U_i, λ_i) sont calculés en décomposant une seule matrice de rigidité tangente. Comme les séries ont un rayon de convergence limité, une méthode de continuation est utilisée afin de parcourir toute la branche solution. La fin de chaque pas asymptotique est déterminée a posteriori à partir des termes (U_i, λ_i) des séries ainsi calculés. Cette propriété permet d'aboutir à un algorithme à pas naturellement adaptatifs, ce qui est difficilement envisageable dans un algorithme itératif classique. De plus, chaque fin de pas est utilisée comme point de départ pour le pas suivant pour décrire la totalité de la branche solution.

2.2 Indicateur de bifurcation

L'indicateur de bifurcation [7, 8] est obtenu en introduisant une perturbation fictive dans le problème. Il ne s'agit pas de modifier le problème initial mais de construire un problème auxiliaire qui permet d'évaluer l'indicateur sur toute la branche d'équilibre et de déterminer tous les points singuliers et les modes correspondants.

Soit $\Delta \mu f$ une force de perturbation fictive appliquée à la structure dans un état déformé (U, λ) . $\Delta \mu$ représente l'intensité de cette force et ΔU la réponse à cette perturbation. Si on considère le problème (2) et si on néglige les termes quadratiques en ΔU à l'équilibre, la forme perturbée est décrite par l'équation suivante :

$$L_t(\Delta U) = \Delta \mu f \quad (6)$$

où $L_t(\cdot) = L(\cdot) + 2Q(U, \cdot)$ est l'opérateur tangent défini au point d'équilibre considéré (U, λ) .

Pour résoudre ce problème, on se donne une condition supplémentaire définie comme suit :

$$\langle L_t^0(\Delta U - \Delta U_0), \Delta U_0 \rangle = 0 \quad (7)$$

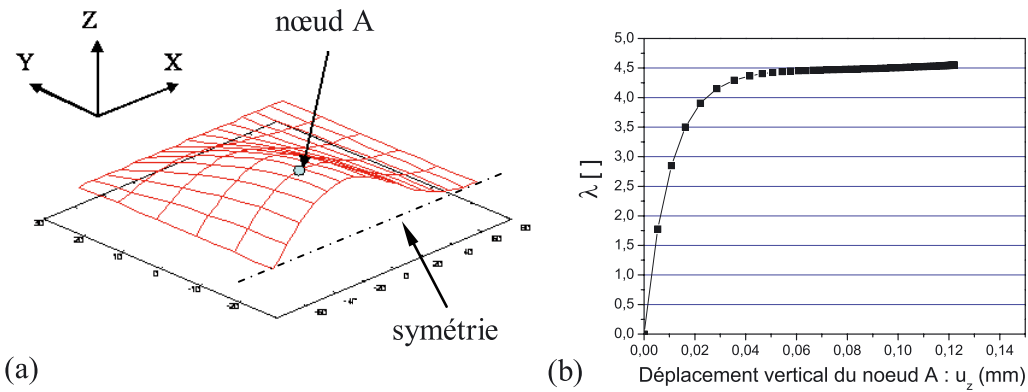


Fig. 1. (a) État post-flambé d'une plaque en appuis simples sur les quatre bords, soumise à une contrainte résiduelle homogène σ_{xx} . (b) Évolution du paramètre du chargement λ au cours du flambage.

où L_t^0 est l'opérateur tangent au point de départ (U_0, λ_0) et ΔU_0 est solution de $L_t^0(\Delta U_0) = f$.

L'indicateur de bifurcation $\Delta\mu$ peut être alors calculé à partir de (6) et (7) :

$$\Delta\mu = \frac{\langle \Delta U_0, f \rangle}{\langle L_t^{-1}(f), f \rangle} \quad (8)$$

qui s'annule exactement aux points critiques.

Le problème ((6) et (7)) est résolu en utilisant la méthode asymptotique numérique. Les variables ΔU et $\Delta\mu$ sont recherchées sous la forme suivante :

$$\Delta U(a) = \sum_{i=0}^N a^i \Delta U_i; \Delta\mu(a) = \sum_{i=0}^N a^i \Delta\mu_i \quad (9)$$

En injectant les équations (9) dans (6) et (7), on obtient : à l'ordre 0 :

$$L_t^0(\Delta U_0) = \Delta\mu_0 f \quad (10)$$

On résout ce système en considérant $\Delta\mu_0 = 1$.

À l'ordre $p > 1$:

$$L_t^0(\Delta U_p) = \Delta\mu_p f - 2 \sum_{j=1}^p Q(U_j, \Delta U_{p-j}) \quad (11)$$

$$\langle \Delta U_p, f \rangle = 0 \quad (12)$$

Les vecteurs U_i et l'opérateur tangent L_t^0 sont ceux déterminés pour le calcul de la branche d'équilibre. Nous n'inversons pas de matrice supplémentaire dans cette procédure. Seuls des seconds membres sont calculés.

3 Applications

Dans ce paragraphe, nous présenterons trois applications telles que les deux premières sont académiques et permettent de montrer la validité de notre approche exposée dans ce travail. La troisième application permet

de considérer un cas proche des conditions réelles de laminage, là où les modes de flambage obtenus sont très proches de ceux observés expérimentalement.

Le calcul de flambage par le modèle qu'on a présenté est réalisé en quatre étapes. Dans une première étape on applique à la tôle une contrainte homogène de traction suivant la direction x , ce qui nous permet d'approcher des conditions réelles de laminage et cela permet à la tôle une certaine rigidité contre flambage. Ensuite, les champs de contraintes résiduelles sont introduits en tant que chargement. À ce stade, le modèle de flambage donne à la fois la charge critique et le mode correspondant. Dans une troisième étape, le modèle effectue un calcul en non linéarité géométrique. En effet, le mode de flambage est introduit comme un défaut dans la géométrie initiale de la structure et un suivi de courbe nous permet de connaître l'état post-flambé de la bande. Enfin, on peut avoir l'état de la tôle après le déchargement de la traction appliquée à la première étape. Les trois dernières étapes constituent une des particularités de ce modèle par rapport à ceux existants dans la littérature. Ainsi, nous pouvons calculer l'état post-flambé de la bande, ce qui permet d'obtenir la forme et l'amplitude des défauts de planéité en laminage qui pourront s'exprimer en U_i .

3.1 Plaque en appuis simples soumise à des contraintes résiduelles homogènes

Soit une plaque de longueur $a = 140$ mm, de largeur $b = 100$ mm et d'épaisseur $h = 1$ mm. Elle est constituée d'un matériau dont les constantes d'élasticité sont données par le module de Young $E = 200$ GPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. Cette plaque est en appuis simples sur les quatre bords et sous contraintes résiduelles homogènes, dont seulement la composante longitudinale est non nulle ($\sigma_{xx} = -(\frac{\pi h}{b})^2 \frac{E}{12(1-\nu^2)}$). On supposera les conditions de symétrie par rapport au plan (x, z) pour ne modéliser que la moitié de la structure (pour ce cas, on n'applique pas de traction à la plaque).

La figure 1 montre le mode post-flambé de la plaque ainsi que l'évolution du paramètre du chargement λ en

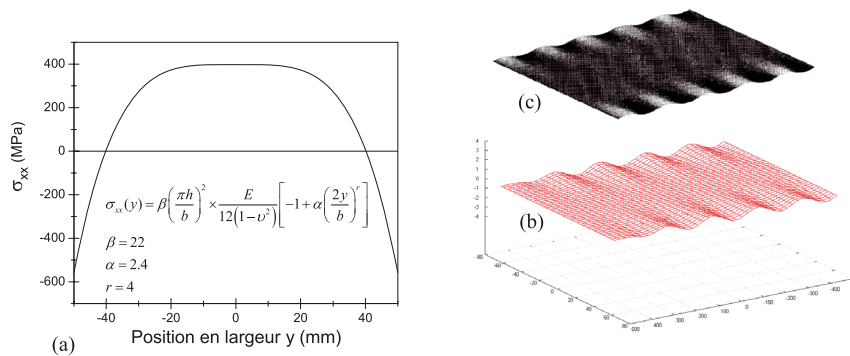


Fig. 2. Comparaison entre les résultats obtenus par [4] (a) et ceux qui sont obtenus par le présent modèle de flambage (b) pour les conditions citées dans le paragraphe 3.2.

Tableau 1. Données du cas de laminage traité.

Largeur de la bande	Épaisseur d'entrée	Épaisseur de sortie	Contrainte de traction	Propriétés élastiques (Module d'Young et coefficient de Poisson)
1232 mm	0,409 mm	0,279 mm	58 MPa	$E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$

fonction du déplacement hors plan du nœud A indiqué sur la figure. En examinant cette évolution, on observe que λ se sature à la charge critique λ_c (ici $\lambda_c = 4,46$ qui correspond à la valeur analytiquement obtenue par [9]) et se sature plus ou moins malgré que la structure garde une faible rigidité de flexion durant le flambage (adoucissement de la pente de la courbe $\lambda = f(u_z)$).

3.2 Plaque sous contraintes résiduelles longitudinales hétérogènes dans la largeur

Cette fois on considère un cas qui a été traité dans [4] qui constitue une plaque dont les propriétés élastiques sont identiques au cas précédent mais de longueur $a = 500$ mm, de largeur $b = 100$ mm et d'épaisseur $h = 1$ mm. La plaque est soumise à un profil de contraintes longitudinales résiduelles $\sigma_{xx}(y)$ comme montré dans la figure 2a. Par ailleurs, pour obtenir des bords longs, les auteurs fixent le centre de la plaque et pour obtenir un centre long, ils fixent les bords. Ces conditions aux limites supplémentaires au problème leur permettent d'aboutir aux résultats souhaités. Ainsi, pour ce profil typiquement obtenu en laminage, les auteurs fixent le centre de la plaque en supposant qu'a priori le mode de flambage est en bords longs (ou bords ondulés). En revanche, dans le modèle qu'on présente, aucune de ces conditions supplémentaires n'est imposée afin d'obtenir ce type de résultats. Toutefois, dans le but de faire une comparaison avec les travaux de [4], on adoptera les mêmes conditions : une fixation du centre de la plaque ayant les bords libres et les deux extrémités en appuis simples. Les figures 2b et 2c montrent que les résultats sont quasi identiques sauf que notre modèle est capable de fournir la forme post-flambée avec les amplitudes des défauts qui sont de l'ordre de 2 mm.

3.3 Application au laminage

Pour un cas de laminage décrit dans le tableau 1, où on ne considère que la partie de la tôle située en aval de l'emprise avec une condition de symétrie au centre de la bande. Dans le modèle de flambage, la sortie de l'emprise a été assimilée à un encastrement. À l'autre extrémité, on impose une condition d'appui simple et une contrainte de traction dans le sens horizontal, correspondant à la tension de bande pendant le laminage. Quant au bord (la rive de la bande), il a été considéré libre.

Dans une étude précédente [10], on a montré que le flambage qui se produit hors emprise n'a pas d'influence sur cette dernière. En se basant sur cette hypothèse, la modélisation des défauts de planéité en laminage est fondée sur une procédure découplée. Cette procédure consiste à utiliser ce modèle de flambage en chaînage avec un modèle nommé Lam3/Tec3 basé sur la MEF 3D adapté à la simulation de laminage des produits longs, mais qui n'est pas capable de tenir compte du flambage sous contraintes résiduelles. Ainsi, un premier calcul de laminage est effectué à l'aide de Lam3/Tec3, sans tenir compte du flambage, fournissant des champs de contraintes résiduelles, y compris hors emprise. Ces champs de contraintes sont utilisés ensuite comme contraintes résiduelles pour le calcul de flambage qui permet d'obtenir la charge critique, le mode de flambage ainsi que l'état post-flambé avec la nouvelle (et réelle) répartition des contraintes dans la tôle. Toutefois, la différence entre la topologie du maillage de Lam3/Tec3 et celui du modèle de flambage fait appel à l'utilisation de la méthode des moindres carrés mobiles (MLS) afin d'effectuer le transfert des champs.

Pour ce cas traité, on montre sur les figures 3a et 3b que des défauts sous forme de plis longitudinaux apparaissent dès la sortie de l'emprise. Ces défauts qui apparaissent généralement à cause de la traction,

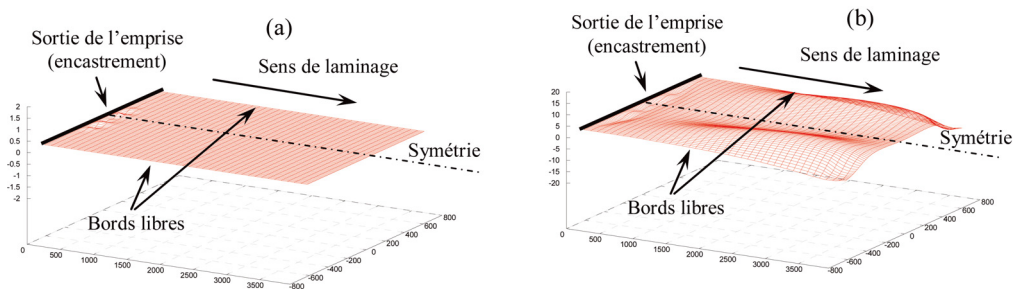


Fig. 3. Défauts de planéité quand la tôle est sous traction (a) et après son relâchement (b).

s'amplifient quand la traction est éliminée en passant de 1 à 5 mm environ. De plus, on note l'état flambé de la tôle, qui est non désirable, après son relâchement.

4 Conclusion

Dans cet article on a présenté un modèle de flambage sous contraintes résiduelles basé sur la méthode asymptotique numérique. Ce modèle a été utilisé dans le but de combler l'incapacité à simuler le flambage sous contraintes résiduelles (d'où les défauts de planéité) à l'aide de Lam3/Tec3, qui est un modèle éléments finis 3D dédié à modélisation du laminage. Les contraintes résiduelles sont alors extraites d'un calcul préalable de laminage par Lam3/Tec3 sans tenir compte du flambage. Ce dernier est ensuite calculé par le modèle considéré auquel les contraintes résiduelles sont transférées.

Pour simuler un cas avec une configuration proche des conditions de laminage, quatre étapes ont été adoptées : mise sous tension, recherche de modes, post-flambage et relâchement de la traction qui permet d'avoir une idée sur l'état d'une tôle laminée après le découpage de cette dernière. Les résultats obtenus sont satisfaisants et montrent des défauts de planéité qui sont rencontrés sur les lignes de laminage.

Références

- [1] H. Zahrouni, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 175 (1999) 71–85
- [2] Y. Tosawa, Analysis of three dimensional deformation in strip rolling taken deformation of rolls into consideration, *Advanced technology of plasticity* 2 (1984) 1151–1160
- [3] C.D. Coman, A.P. Bassom, An asymptotic description of the elastic instability of twisted thin elastic plates, *Acta Mechanica* 200 (2008) 59–68
- [4] A. Bush, R. Nicholls, J. Tunstall, Stress levels for elastic buckling of rolled strip and plate, *Ironmaking and steel-making* 28 (2001) 481–484
- [5] F.G. Rammerstorfer, F.D. Fisher, N. Friedl, Buckling of free infinite strips under residual stress and global tension, *J. Appl. Mech.* 68 (2001) 399–404
- [6] F.D. Fisher, F.G. Rammerstorfer, N. Friedl, W. Wisser, Buckling phenomena related to rolling and levelling of sheet metal, *International journal of mechanical sciences* 42 (2000) 1887–1910
- [7] E.H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, M. Boudi, Bifurcation Points and Bifurcated Branches by an Asymptotic Numerical Method and Padé Approximants, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 60 (2004) 1987–2012
- [8] P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, An asymptotic numerical method to compute bifurcating branches, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 4 (1998) 1365–1389
- [9] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of elastic stability*, Mc Graw Hill Book Company, Inc, New York, Second edition, 1961
- [10] S. Abdelkhalek, P. Monmitonnet, N. Legrand, P. Buessler, Manifested flatness predictions in thin strip cold rolling, In 11th ESAFORM conference forging and rolling, 2008
- [11] A. Hacquin, P. Montmitonnet and J.P. Guillaud. A steady state thermo-elastoviscoplastic finite element model of rolling which coupled thermo-elastic roll deformation. *J. Materials Processing Technology* 60 (1998) 109–116
- [12] N. Jacques, A. Elias, M. Potier-Ferry, H. Zahrouni, Buckling and wrinkling during strip conveying in processing lines. *J. Materials Processing Technology* 190 (2007) 33–40