

Analyse dynamique par projection modale d'un modèle 2D du système couplé crâne-LCR-cerveau

ADIL EL BAROUDI, FULGENCE RAZAFIMAHERY
ET LALAONIRINA RAKOTOMANANA-RAVELONARIVO^a

Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR), UMR 6625 du CNRS, Équipe d'analyse Mécanique,
Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

Reçu le 9 juillet 2010, accepté le 12 juillet 2010

Résumé – Ce travail a pour but l'étude du comportement dynamique d'un problème d'interaction fluide-structure. Pour cela, on utilise une méthode semi-analytique basée sur la projection modale. Les résultats obtenus seront comparés avec une solution numérique, obtenue à l'aide du logiciel *Comsol Multiphysics*. Le problème étudié est issu d'un dispositif expérimental développé en (Hault-Dubrule, 2007, Thèse de doctorat). On calcule certains paramètres dynamiques afin de quantifier la sévérité d'un choc.

Mots clés : Interaction fluide-structure / projection modale / choc / éléments-finis.

Abstract – **Dynamic analysis by modal projection of a 2D model skull-CSF-brain system.** The aim of this work is to study the dynamic behavior of a problem of fluid-structure interaction. For this purpose, we use a semi-analytical method based on modal projection. The results will be compared with a numerical solution obtained using the software *Comsol Multiphysics*. The problem is studied from an experimental device developed in (Hault-Dubrule, 2007, Thèse de doctorat). We calculate certain dynamic parameters to quantify the severity of shock.

Key words: Fluid-structure interaction / modal projection / shock / finite-element method

1 Introduction

Cette étude est une suite de celle que nous avons menée récemment et qui consiste à analyser quelques problèmes d'interaction fluide-structure posés dans des domaines élastiques concentriques séparés ou non par un fluide. On rencontre ce type de géométrie en biomécanique. C'est le cas par exemple du système crâne-cerveau, où une fine couche de fluide (LCR) sépare et assure le couplage entre deux domaines élastiques de caractéristiques matérielles très différentes. Vu l'importance du sujet en accidentologie, différents modèles ont été proposés. Outre les modèles discrets utilisant le formalisme de la mécanique des solides rigides [2, 3], certains auteurs ont proposé des modèles continus globaux [4–6] prenant en compte le caractère élastique du système. Entre-temps, d'autres auteurs [1, 7] se sont intéressés sur le caractère couplé du problème. Pour cela, ils ont élaboré des dispositifs expérimentaux d'interaction fluide-structure assez sophistiqués permettant de simuler le phénomène

de choc. Les résultats expérimentaux ont été comparés avec ceux obtenus par simulation numérique utilisant la méthode du type ALE [1] couplant les équations de Navier-Stokes avec celles de l'élasticité. Néanmoins, dans la réalisation d'un dispositif expérimental, l'épaisseur de la couche fluide (LCR) n'est pas toujours respectée, ni la forme exacte du crâne, à cause d'une difficulté conceptuelle. En outre, en simulation numérique, des problèmes de convergence peuvent apparaître. Il est alors intéressant de proposer d'autres modèles susceptibles de simuler le système pendant un choc. En effet, en faisant une analyse dimensionnelle du problème couplé, il ressort que le modèle de Navier-Stokes n'est pas le plus adapté pour ce type de problème. Notre travail consiste donc à proposer un modèle d'interaction fluide-structure adapté au phénomène de choc, où l'échelle de temps de référence est très petite par rapport à l'échelle de temps de convection. Celui-ci complète les résultats obtenus en [8], qui consistent en la recherche d'une solution analytique d'un problème modal d'interaction fluide-structure. L'existence des modes propres couplés obtenus analytiquement va nous permettre une résolution par projection modale du problème traité qui modélise le système crâne-cerveau. Un dispositif expérimental associé existe et est développé

^a Auteur pour correspondance :
Lalaonirina.rakotomanana-ravelonarivo@univ-rennes1.fr

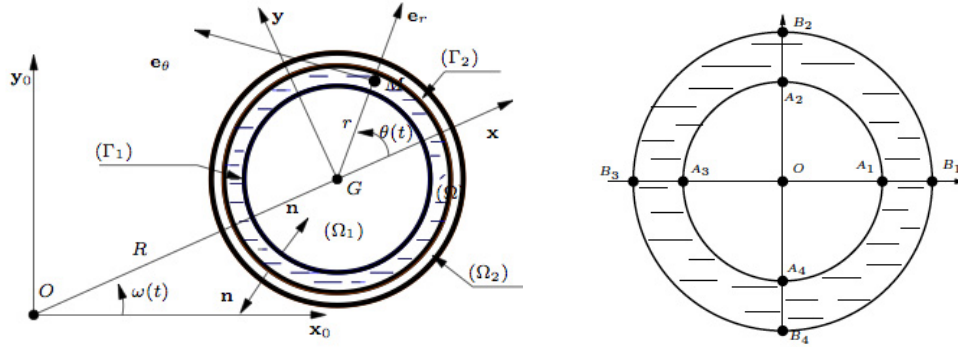


Fig. 1. Schéma 2D du dispositif expérimental et localisation des points de calcul.

largement en [1]. Les résultats obtenus en [8] nous ont permis de modéliser le crâne comme étant un solide rigide. La première partie de ce travail établit le problème modèle et développe les divers aspects de la technique de résolution analytique. Ensuite, on aborde la résolution numérique du problème par la méthode des éléments-finis. Les solutions analytiques et numériques sont ensuite comparées afin de valider la fiabilité du logiciel de calcul utilisé. Dans la deuxième partie, on s'intéresse à l'étude de la sensibilité du modèle proposé par rapport à l'épaisseur de la couche fluide. En effet, cette épaisseur possède une large plage de variation, dont la reproduction expérimentale pose de nombreux problèmes techniques.

2 Le problème modèle

On se place en deux dimensions, dans l'hypothèse de déformation plane. Le couplage est supposé inertiel, c'est-à-dire que la célérité des ondes longitudinales est supposée grande par rapport à une vitesse caractéristique du fluide. La compressibilité du fluide est prise en compte. On considère un repère galiléen $\mathcal{R}_0 = (O; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ et un repère tournant $\mathcal{R} = (G; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_0)$ lié au système couplé. On note $\mathbf{OG} = R\mathbf{x}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{R}|\mathcal{R}_0) = \dot{\omega}(t)\mathbf{z}_0$ la rotation instantanée du bras.

Les domaines $(\Omega_i)_{i=1,2}$ sont des domaines élastiques et Ω le domaine fluide. On note $\Gamma_i = \Omega \cap \Omega_i$. Par hypothèse, le domaine Ω_2 est supposé rigide [1]. On note $\mathbf{u}$, ρ , λ et μ le champ de déplacement, la masse volumique et les deux coefficients de Lamé respectivement du domaine solide élastique Ω_1 ; ρ_0 , c_0 et p sont respectivement la masse volumique, la célérité du son et le champ de pression dans le domaine fluide Ω . Le système couplé est lié rigidement au repère $\mathcal{R}$ par le biais du bras OG , supposé rigide. Ce dispositif peut aussi modéliser une centrifugeuse humaine, de type Latécoère, servant à l'entraînement des pilotes de chasse.

Les caractéristiques matérielles et géométriques utilisées dans cette étude sont issues de [1] : on fixe la longueur du bras à $R = 0,165$ m. La valeur maximale de $\dot{\omega}$ est égale à 16 rad.s^{-1} , tandis que celle de $\ddot{\omega}$ est égale à 1850 rad.s^{-2} . Le temps maximal de calcul est fixé à $500 \text{ ms} = 0,5 \text{ s}$. Le problème dynamique peut être formulé en termes de potentiels, comme c'est le cas en [9], mais

ici on va le formuler en variables primales $\mathbf{u}$ et p . Comme le repère $\mathcal{R}$ n'est pas galiléen, les équations d'équilibre du solide, ainsi que celle de l'acoustique, doivent être reformulées.

Proposition. Dans le repère non galiléen $\mathcal{R}$, le problème aux limites associé au dispositif précédent s'écrit : trouver $(\mathbf{u}, p)$ solutions de

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \text{div}[\sigma(\mathbf{u})] + \rho \mathbf{F}(t) & (\Omega_1) \\ \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \text{div} \left[-\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - \mathbf{q}) \right] = Q & (\Omega) \\ \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} = -p \mathbf{n} & (\Gamma_1) \\ \frac{1}{\rho_0} [\nabla p - \mathbf{q}] \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} & (\Gamma_1) \\ [\nabla p - \mathbf{q}] \cdot \mathbf{n} = 0 & (\Gamma_2) \end{cases} \quad (1)$$

où $-\mathbf{F}(t)$ est l'accélération d'entraînement. Pour le problème acoustique, on utilise la décomposition suivante $\rho \mathbf{F}(t) = -\rho_0 \begin{bmatrix} -R\dot{\omega}^2(t) - x\ddot{\omega}^2(t) \\ R\ddot{\omega}(t) - y\ddot{\omega}^2(t) \end{bmatrix} - \rho_0 \begin{bmatrix} -y\ddot{\omega}(t) \\ x\ddot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{q} + \mathbf{Q}$ où $\mathbf{q}$ est une source qualifiée de dipôle et $\text{div}(\mathbf{Q}) = Q$ est le monopôle, qui est ici nul.

3 Résolution par projection modale

La technique de résolution par projection modale consiste dans un premier temps à formuler le problème de départ de façon faible. En prenant les fonctions tests classiques $\mathbf{V} = \mathbf{H}^1(\Omega_1)$ et $Q = H^1(\Omega_1)$, la formulation variationnelle du problème aux limites (1) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega_1} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dx = \int_{\Gamma_1} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v} dx \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{p\phi}{c_0^2} dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \phi dx + \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Gamma_1} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \phi d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \phi dx \end{cases} \quad (2)$$

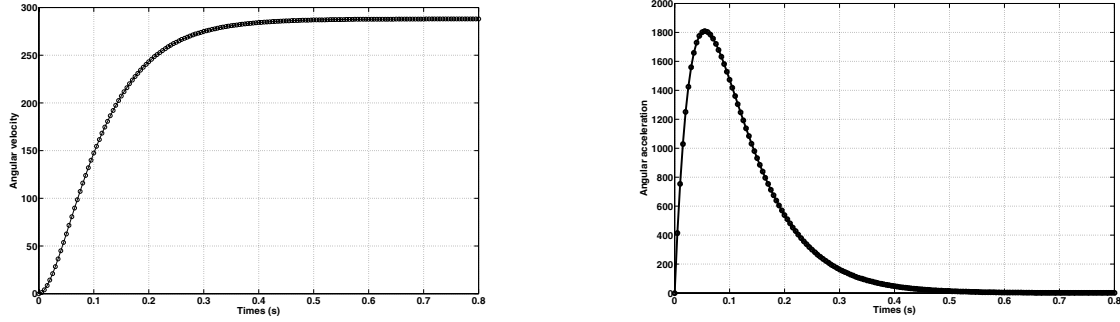


Fig. 2. Vitesse et accélération angulaires.

	E (Pa)	ν	ρ (kg.m ⁻³)	R (m)	c_0 (m.s)
Ω			1000	$R_2 = 0,090$	1450
Ω_1	$6,775 \times 10^5$	0,48	1150	$R_1 = 0,075$	

pour tout $(\mathbf{v}, \phi) \in \mathbf{V} \times Q$. Ensuite, on décompose le champ des déplacements $\mathbf{u}$ et le champ de pression p sur la base modale notée $(\mathbf{X}_k(x), p_k(x))_{k=1,\dots,N}$ du système couplé

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \mathbf{X}_i(x); \quad p(x, t) = \sum_{i=1}^N r_i(t) p_i(x) \quad (3)$$

où $(\mathbf{X}_i(x), p_i(x))$ sont solutions du problème modal associé au problème aux limites (1). En injectant la décomposition modale (3) dans le problème variationnel (2), et en utilisant l'orthogonalité par rapport à l'opérateur de masse et de raideur, on obtient

$$\begin{cases} M_i \frac{d^2 q_i}{dt^2} + K_i q_i(t) + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_1} p_j(x) \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right) r_j(t) = F_i(t) \\ M_i^f \frac{d^2 r_i}{dt^2} + K_i^f r_i(t) + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_1} \rho_0 p_j \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right) \frac{d^2 q_i}{dt^2} = G_i(t) + S_i(t) \end{cases} \quad (4)$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} M_i = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{X}_i(x)^2 dx; \quad K_i = \int_{\Omega_1} \sigma(\mathbf{X}_i) : \varepsilon(\mathbf{X}_i) dx; \\ F_i(t) = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{X}_i dx \\ M_i^f = \int_{\Omega} \frac{p_i^2(x)}{c_0^2} dx; \quad K_i^f = \int_{\Omega} \nabla p_i \cdot \nabla p_i dx; \\ G_i(t) = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla p_i dx; \quad S_i(t) = \int_{\Omega} 2\rho_0 \dot{\omega}^2(t) p_i dx \end{cases}$$

On introduit la matrice de masse ajoutée $\mathbb{M}^a$: $M_{ij}^a = \frac{1}{\omega_i^2} \int_{\Gamma_1} p_j(x) \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma$, et on a

Proposition. La matrice de masse ajoutée $\mathbb{M}^a$ est symétrique et définie positive. Dans le cas d'un domaine

cylindrique, la matrice $\mathbb{M}^a$ est diagonale et dans ce cas, on peut l'écrire sous la forme

$$\mathbb{M}^a = \text{diag}(M_{11}^a, \dots, M_{NN}^a) = \text{diag}(M_1^a, \dots, M_N^a) \quad (5)$$

Les éléments K_i et K_i^f des matrices de rigidité modale ont pour expressions :

$$K_i = \omega_i^2 M_i + \frac{M_{ii}^a}{\rho_0 \omega_i^2} = \omega_i^2 M_i + \frac{M_i^a}{\rho_0 \omega_i^2}; \quad K_i^f = \omega_i^2 M_i^f + \frac{M_i^a}{\omega_i^2} \quad (6)$$

En introduisant la matrice diagonale $\mathbb{P} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, on obtient les résultats suivants

$$\mathbb{K} = \mathbb{P}^2 \mathbb{M} + \frac{1}{\rho_0} \mathbb{P}^{-2} \mathbb{M}^a; \quad \mathbb{K}^f = \mathbb{P}^2 \mathbb{M}^f + \mathbb{P}^{-2} \mathbb{M}^a \quad (7)$$

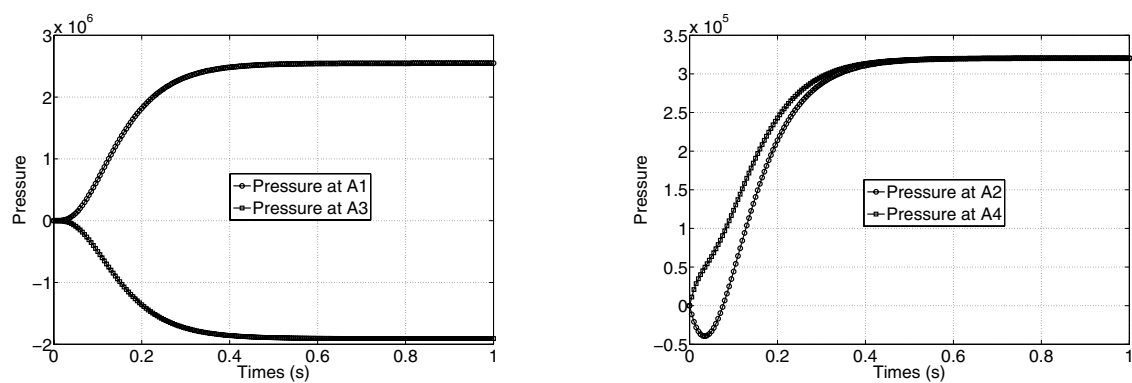
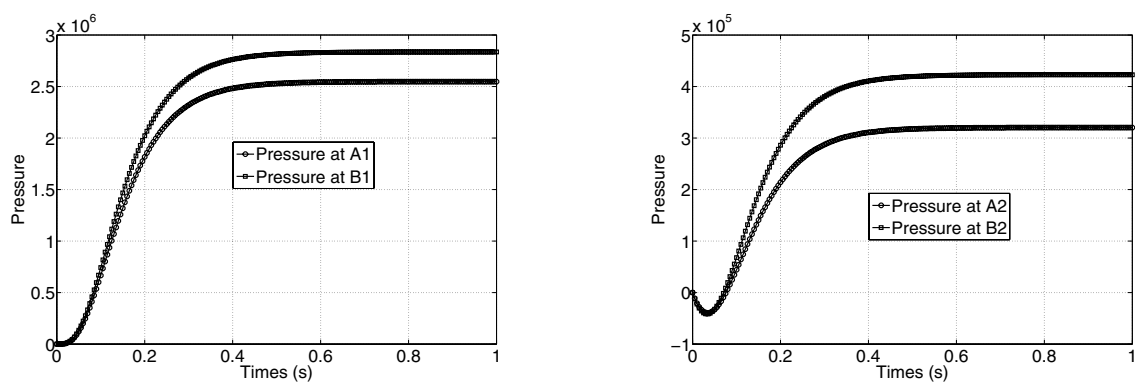
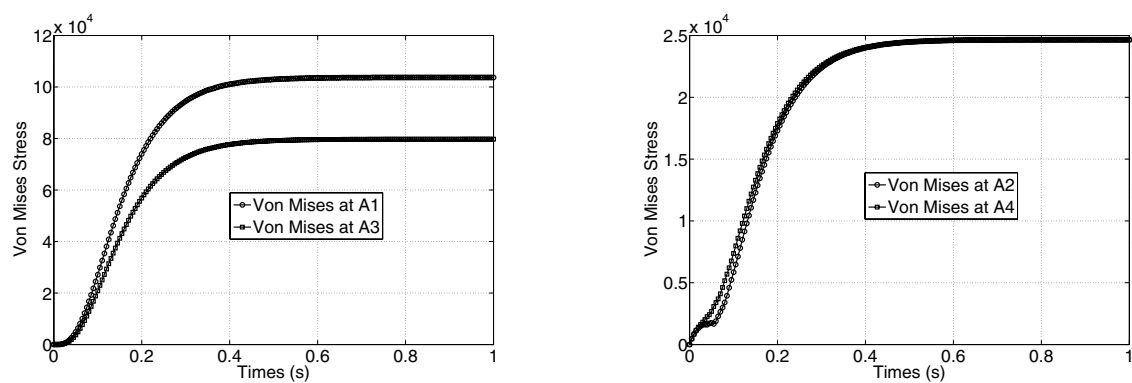
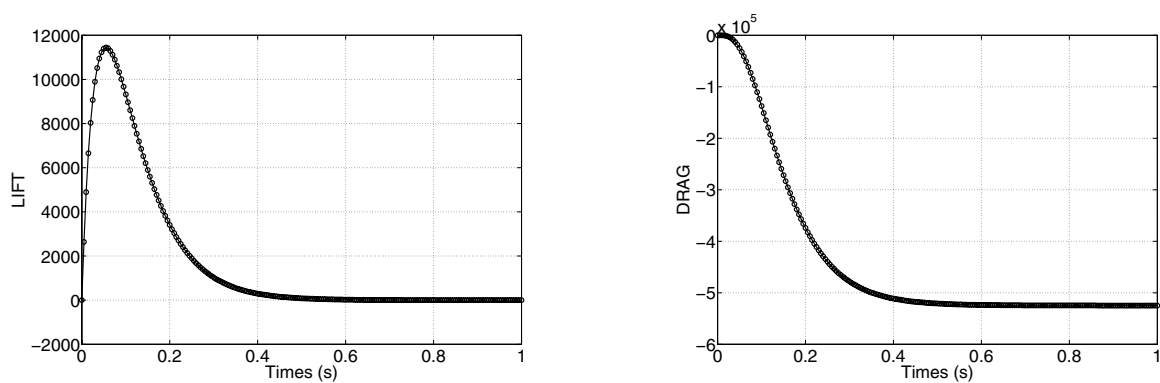
Preuve. La première partie de la proposition résulte de la seconde formule de Stokes. Pour calculer K_i , il suffit de revenir sur l'équation d'équilibre, en la multipliant par $\mathbf{X}_i$. Le calcul de la matrice de rigidité pour l'acoustique s'obtient de la même façon. En notant $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t))^T$ et $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_N(t))^T$, le problème de Cauchy associé au système couplé s'écrit

$$\begin{cases} \mathbb{M} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbb{K} \mathbf{q}(t) + \frac{1}{\rho_0} \mathbb{M}^a \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \\ \mathbb{M}^f \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mathbb{M}^a \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbb{K}^f \mathbf{r}(t) = \mathbf{G}(t) + \mathbf{S}(t) \\ \text{avec } \mathbf{q}(0) = \mathbf{r}(0) = \frac{d\mathbf{q}}{dt}(0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Ce système peut être découplé, et on a

Proposition. Le problème de Cauchy (8) peut être découplé et conduit au problème en $\mathbf{q}(t)$

$$\begin{cases} \mathbb{A} \frac{d^4 \mathbf{q}}{dt^4} + \mathbb{B} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbb{C} \mathbf{q}(t) = \\ \quad -\mathbb{M}^f \mathbb{M}^{-a} \frac{d^2 \mathbf{F}}{dt^2} - \mathbb{K}^f \mathbb{M}^{-a} \mathbf{F}(t) - \frac{\mathbf{H}(t)}{\rho_0} \\ \mathbf{q}(0) = \frac{d\mathbf{q}}{dt}(0) = \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2}(0) = \frac{d^3 \mathbf{q}}{dt^3}(0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Fig. 3. Pression en $[A_1, A_3]$ et $[A_2, A_4]$.Fig. 4. Pression en $[A_1, B_1]$ et $[A_2, B_2]$.Fig. 5. Contrainte de Von Mises $[A_1, A_3]$ et $[A_2, A_4]$.Fig. 6. Portance $Y(t)$ et traînée $X(t)$.

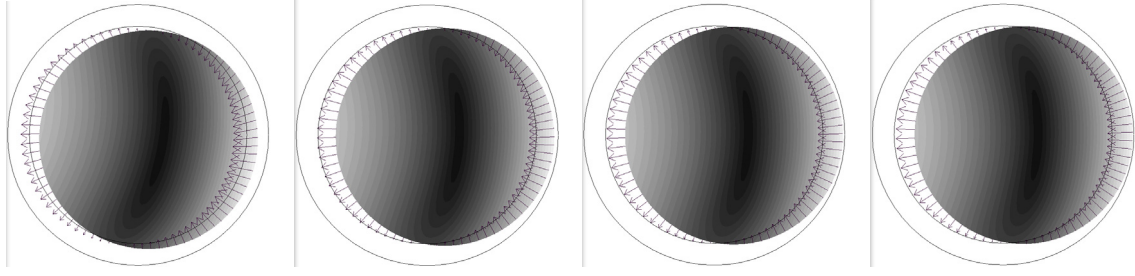


Fig. 7. Contrainte de Von Misès aux instants $t = 0,1$ s, $0,2$ s, $0,3$ s et $0,4$ s.

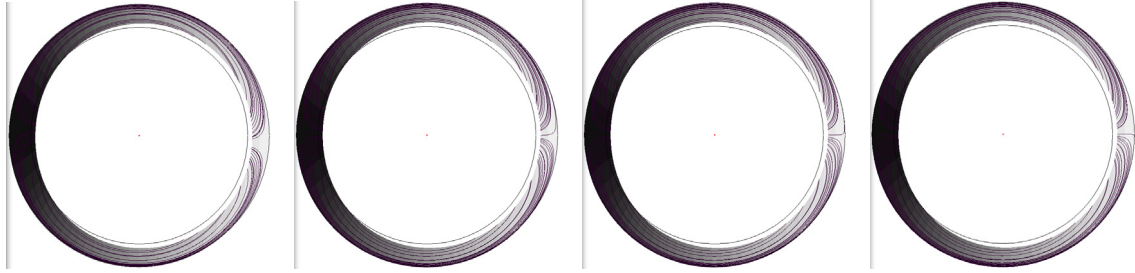


Fig. 8. Champ de pression aux instants $t = 0,1$ s, $0,2$ s, $0,3$ s et $0,4$ s.

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t) &= \mathbf{G}(t) + \mathbf{S}(t) ; \mathbb{A} = \mathbf{M}^f \mathbf{M}^{-a} \mathbf{M} ; \\ \mathbb{B} &= \mathbf{M}^f \mathbf{M}^{-a} \mathbf{K} + \mathbf{M}^a + \mathbf{K}^f \mathbf{M}^{-a} \mathbf{M} ; \mathbb{C} = \mathbf{K}^f \mathbf{M}^{-a} \mathbf{K} \end{aligned} \quad (10)$$

Preuve. En effet, en éliminant $\mathbf{r}(t)$ dans la première équation de (8) et en l'injectant dans la deuxième équation, on obtient le résultat.

3.1 Mise en œuvre de la technique de projection modale

Le calcul des coefficients, ainsi que la résolution du système, ont été réalisés à l'aide du logiciel de calcul formel *Maple*. Les champs de déplacement et de pression ont pour expressions [8]

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \phi(r) \sin(n\theta) ; & u_\theta(r, \theta) &= \psi(r) \cos(n\theta) ; \\ p(r, \theta) &= -\frac{\chi(R_1)}{K(R_1)} K(r) \sin(n\theta) \end{aligned}$$

On calcule ensuite les différentes quantités associées à l'équation modale

$$\left\{ \begin{aligned} M_i &= \pi \int_0^{R_1} \rho_1 [\phi^2(r) + \psi^2(r)] r dr ; \\ M_i^a &= -\pi \rho_0 R_1 \chi(R_1) \phi(R_1) \\ M_i^f &= \frac{\pi}{c_0^2} \frac{\chi^2(R_1)}{K^2(R_1)} \int_{R_1}^{R_2} r K^2(r) dr ; \\ K_i &= \omega_i^2 M_i + \frac{M_i^a}{\rho_0} ; K_i^f = \omega_i^2 (M_i^f + M_i^a) \\ F_i(t) &= \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}_i dx ; G_i(t) = \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \nabla p_i d\Gamma ; \\ S_i(t) &= \int_{\Omega} 2\rho_0 \dot{\omega}^2(t) p_i dx \end{aligned} \right.$$

avec $\mathbf{X}_i = [\phi(r) \sin(n\theta), \psi(r) \cos(n\theta)]_{(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)}^T$. Certaines composantes de F_i sont nulles pour certaines valeurs de n grâce à la propriété d'orthogonalités des modes azimutaux. Les composantes de G_i possèdent les mêmes propriétés que celle de F_i .

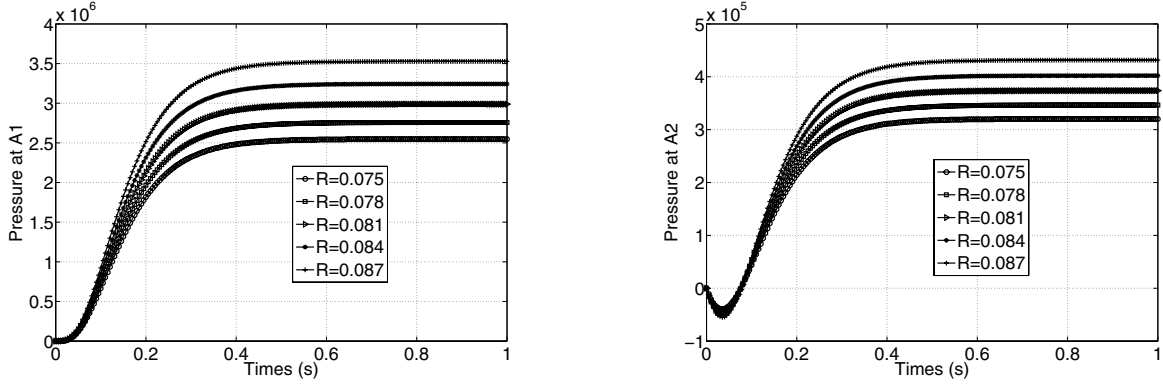
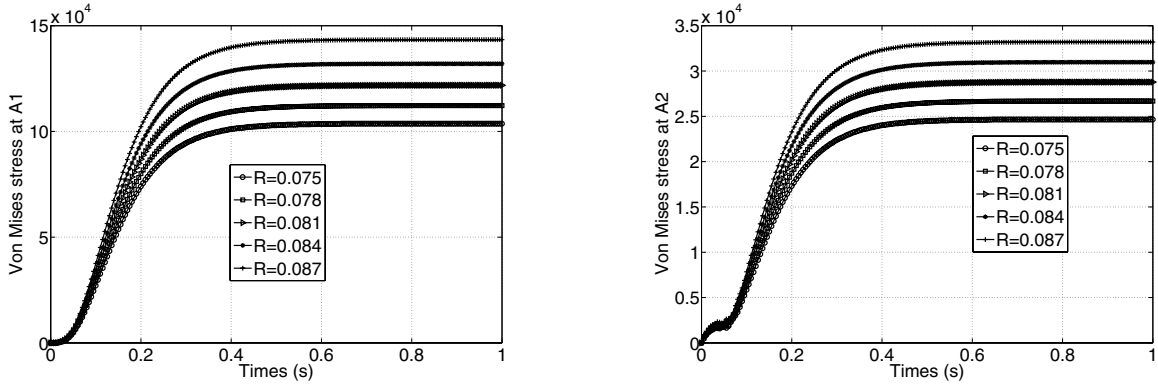
3.2 Résolution numérique du problème

La résolution numérique du problème est effectuée à l'aide du logiciel *Comsol Multiphysics*. Le problème acoustique sera alors formulé autrement, pour tenir compte de l'exigence du logiciel. Ainsi, le problème couplé s'écrit : trouver $(\mathbf{u}(x, t), p(x, t))$ solutions du problème aux limites (1), dont la formulation variationnelle s'écrit

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega_1} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_1} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \\ \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v} dx \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{p\phi}{c_0^2} dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \phi dx + \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Gamma_1} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \phi d\Gamma = \\ \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \phi dx \end{aligned} \right. \quad (11)$$

pour tout $(\mathbf{v}, \phi) \in \mathbf{V} \times Q$. En utilisant les éléments de Lagrange, où $\mathbf{u}_h \in \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ et $p_h \in \mathbb{P}_1$, la discrétisation du problème variationnel conduit au système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{MO} \\ \mathbb{M}_a \mathbf{M}^f \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{KB} \\ \mathbf{OK}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbb{B} = \frac{1}{\rho_0} \mathbb{M}_a \quad (12)$$

Fig. 9. Pression en A_1 et A_2 en fonction de l'épaisseur du film.Fig. 10. Contrainte de Von Mises en A_1 et A_2 .

où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{P}$ sont des vecteurs nodaux associés à u et p respectivement et les éléments des matrices blocs sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx = \mathbf{V}^T \mathbb{M} \mathbf{U}; \quad \int_{\Omega_1} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dx = \mathbf{V}^T \mathbb{K} \mathbf{U}; \\ \int_{\Gamma_1} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{V}^T \mathbb{B} \mathbf{P} \\ \int_{\Omega} \frac{p \phi}{c_0^2} dx = \Phi^T \mathbb{M}^f \mathbf{P}; \quad \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \phi dx = \Phi^T \mathbb{K}^f \mathbf{P}; \\ \int_{\Gamma_1} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \phi d\Gamma = \Phi^T \mathbb{M}_a \mathbf{U} \\ \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v} dx = \mathbf{V}^T \mathbf{F}; \quad \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \phi dx = \Phi^T \mathbf{G} \end{array} \right. \quad (13)$$

$\mathbf{V}$ et Φ étant les vecteurs nodaux associés aux fonctions tests $\mathbf{v}$ et ϕ respectivement. Pour résoudre le système linéaire non symétrique (12), on a testé les différentes options offertes par le logiciel [10]. Il s'est avéré que l'utilisation d'un solveur non linéaire (méthode de Newton) avec un pas de temps adaptatif semble être un bon compromis entre la précision et le temps de calcul. Pour accéder aux efforts globaux, le torseur des efforts s'exerçant sur

la paroi a été calculé, à savoir la résultante et le moment en O :

$$\mathbf{R} = - \int_{\Gamma_1} p \mathbf{n} d\Gamma_1 = X(t) \mathbf{x} + Y(t) \mathbf{y};$$

$$\mathbf{M} = - \int_{\Gamma_1} \mathbf{OM} \wedge p \mathbf{n} d\Gamma_1 = M(t) \mathbf{z}$$

3.3 Résultats semi-analytiques et numériques

Pour la projection modale, à partir des résultats obtenus en [8] pour les fréquences associées au modèle et de l'estimation de l'erreur de troncature modale, on a fixé le nombre de modes à $N = 10$. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus par voie numérique. Les lois horaires pour différents paramètres mécaniques sont en parfait accord. On a calculé les différentes quantités aux différents points du domaine, donnés par la carte de mesure définie précédemment.

3.3.1 Résultats pour le champ de pression

Le niveau du champ de pression fluctuante permet d'obtenir des informations sur la variation de la contrainte normale au niveau des interfaces. Pour les quatres points situés sur l'interface LCR-cerveau, on obtient les courbes suivantes (Fig. 3).

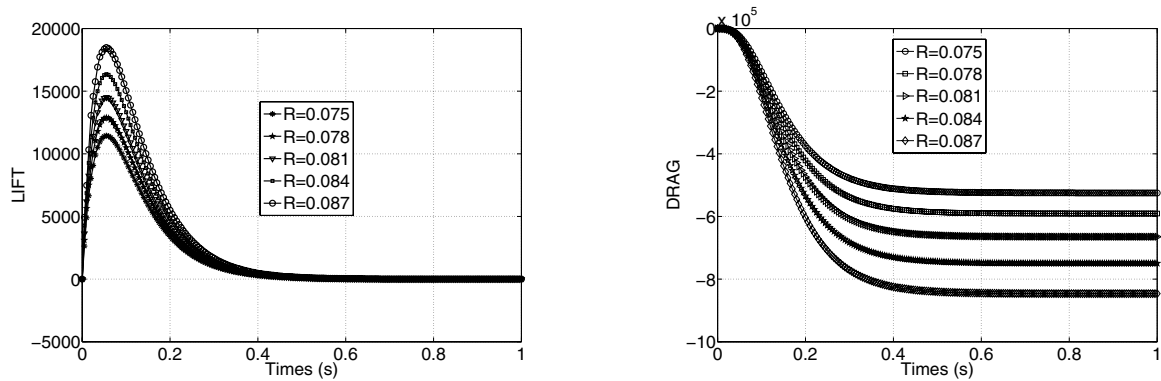


Fig. 11. Portance et traînée.

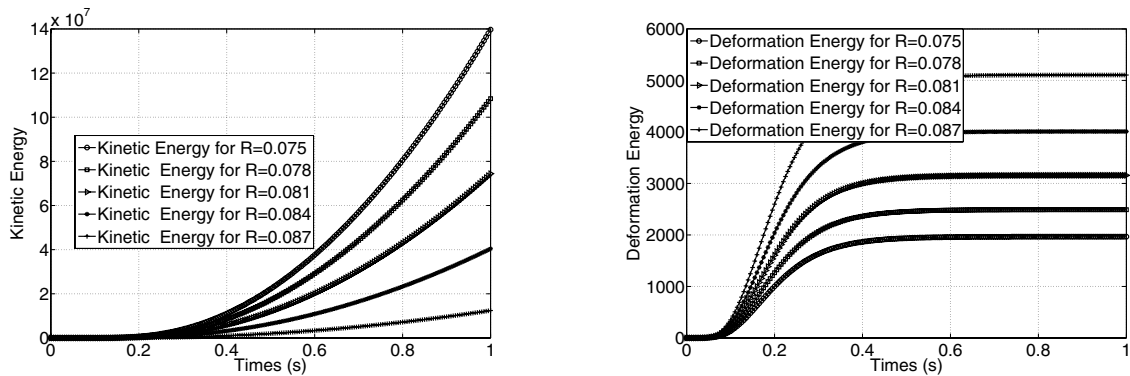


Fig. 12. Énergies cinétique et de déformation.

Pour les deux points situés en A_1 et A_3 , le champ de pression varie de façon symétrique, mais pas avec la même amplitude. Le point A_1 est en surpression, tandis que A_3 est en dépression. En revanche, pour les deux points A_2 et A_4 , la pression varie dans le même sens. Ceci est dû au fait que les espaces annulaires situés au voisinage de ces deux points ont pratiquement la même taille.

Il est aussi utile d'avoir la variation radiale du champ de pression. Pour cela, on a sorti les courbes de pression aux deux couples de points (A_1, B_1) et (A_2, B_2).

On constate que le niveau de pression sur l'interface extérieure est bien plus forte que celui de l'interface Lcr-cerveau. Ce résultat est en accord avec l'hypothèse de débit nul sur la frontière extérieure. En effet, sur cette frontière, la pression doit être extrême. Pour les deux autres couples de points, on constate les mêmes phénomènes.

3.3.2 Résultats sur la contrainte de Von Mises

La connaissance de la contrainte de Von Mises permet d'accéder à la contrainte équivalente, donc d'obtenir des renseignements sur la sévérité du choc. Le modèle adopté ne permet pas d'accéder à cette quantité au niveau de l'interface.

On constate une légère différence entre les valeurs aux points A_1 et A_3 . Celle-ci est due essentiellement à la

différence du niveau d'accélération des deux points. En revanche, pour les deux autres points A_2 et A_3 , les valeurs sont du même niveau, car les deux points subissent le même niveau d'accélération. Ces résultats montrent aussi une très grande sensibilité des variations de la contrainte de Von Mises à l'accélération normale du dispositif.

3.3.3 Résultats sur les efforts globaux

Les résultats sur les efforts globaux permettent entre autres d'accéder au torseur des efforts qui s'exercent sur le cerveau pendant tout le mouvement. Comme le mouvement est plan, celui-ci est un glisseur, donc on peut à tout moment déterminer le point d'application $I(t)$. On a sorti uniquement les composantes $X(t)$ et $Y(t)$, appelées respectivement traînée et portance.

On constate que la portance varie comme la composante tangentielle de l'accélération du dispositif et reste positive durant tout le mouvement, tandis que la traînée varie comme la composante normale de l'accélération, mais de signe contraire. Ce résultat, qui semble en désaccord avec les conclusions classiques, s'explique grâce à la présence de couche fluide. Le moment varie dans le même sens que la composante normale de l'accélération. Ses valeurs très faibles s'expliquent par le fait que le point $I(t)$ défini précédemment est situé au voisinage de O .

3.3.4 Déformées en différents instants

Regardons maintenant les figures de déformées du cerveau à différents instants, ainsi que le champ de pression fluctuante.

On constate que durant tout le mouvement, les deux zones diamétralement opposées, situées sur l'axe du bras sont en surpression et en dépression, ce qui confirme les résultats obtenus précédemment sur les courbes de pression.

4 Influence du confinement

Dans la réalité, l'espace contenant le liquide céphalo-rachidien est très mince. Son épaisseur est d'environ 2–3 mm. La réalisation d'un dispositif expérimental, prenant en compte une telle dimension n'est pas toujours possible. Ceci a amené la conception d'un dispositif expérimental réaliste qui ne tient pas compte de cette dimension. Il est alors nécessaire de regarder la sensibilité du comportement dynamique du système, en faisant varier cette dimension. C'est le but de l'étude de confinement. Regardons maintenant la variation des paramètres dynamiques du problème en faisant varier l'épaisseur de la couche fluide. Pour cela, on fixe la valeur du rayon intérieur R_2 du solide Ω_2 à 0,090 m et on fait varier le rayon R_1 du domaine Ω_1 . Les calculs analytiques donnent les résultats suivants : $e = R_2 - R_1 = 0,012$ m et $R_1 = 0,078$ m.

4.1 Pression en différents points

On calcule les variations du champ de pression aux quatre points définis précédemment.

Ces résultats montrent que le niveau de pression augmente lorsque l'épaisseur du film diminue. Ceci est en accord avec la théorie des films minces en couplage inertiel. On a bien un effet de confinement. Cet effet est dû à la variation de la masse ajoutée du système couplé.

4.2 Contrainte de Von Mises en différents points

On regarde maintenant la variation de la contrainte de Von Mises en fonction de l'épaisseur de la couche fluide. Pour cela, on a les résultats suivants pour les deux points A_1 et A_2 . On obtient les mêmes résultats que pour le champ de pression.

4.3 Variations des efforts globaux

Pour les efforts globaux, on obtient les courbes suivantes. Pour la portance et la traînée, on a les mêmes constats que pour le champ de pression. En revanche, les variations du moment ne semblent suivre les mêmes propriétés que les autres quantités. En fait, ce résultat est dû essentiellement à la faible valeur déjà évoquée précédemment.

4.3.1 Variation de l'énergie cinétique et de l'énergie de déformation

Deux autres quantités peuvent être intéressantes dans l'analyse du système couplé. Il s'agit des énergies cinétique et de déformation du cerveau.

On peut constater que l'énergie cinétique et la traînée sont étroitement contrôlées par l'accélération normale du bras, tandis que la portance est contrôlée par l'accélération tangentielle.

5 Conclusion

À l'issue de cette étude, on peut essayer de dégager quelques conclusions. L'approche par projection modale donne de très bons résultats, en utilisant uniquement quelques termes ($N \leq 10$) dans le développement de la solution. Cette approximation est d'autant meilleure que la valeur de la première fréquence propre est assez élevée. Le seul inconvénient est que dans une géométrie compliquée, l'obtention par voie analytique des modes propres n'est pas toujours possible. En ce qui concerne le champ de déplacement, les résultats obtenus montrent sa sensibilité par rapport à l'accélération normale. Ceci est en accord avec le modèle utilisé, car la condition de glissement à l'interface cerveau-LCR assure uniquement la continuité de la composante normale de la vitesse. Au niveau du champ de pression, les résultats obtenus semblent être en accord avec ceux observés. La variation de la pression dans les deux points situés suivant l'axe du bras est sensible à l'accélération normale, tandis que dans l'axe orthogonal au bras, les résultats semblent sensibles à l'accélération tangentielle. Pour la contrainte de Von Mises, les résultats semblent être contraires à ceux obtenus pour le champ de pression. En effet, sur les deux points situés sur l'axe du bras, on constate l'existence d'un pic, à l'instant $t = 0,05$ s. L'allure montre qu'en ces deux points, c'est l'accélération tangentielle qui l'emporte sur l'accélération normale. Sur les deux points situés sur l'axe orthogonal au bras, la variation de la contrainte suit celle de l'accélération tangentielle. Ces résultats montrent que la partie la plus sollicitée pendant le choc est celle située suivant l'axe du bras. Autrement dit, lors d'un impact, la lésion peut survenir sur l'axe orthogonal à la direction de l'impact. L'étude de confinement montre que le modèle n'est pas très sensible à la variation de l'épaisseur de couche du LCR. On peut penser que cette propriété est due à l'approximation acoustique utilisée dans le modèle. Finalement, le modèle proposé permet en première approximation de quantifier la sévérité d'un choc dans le cadre d'un modèle prenant en compte le caractère couplé du problème. Une amélioration du modèle proposé ici peut être la prise en compte du caractère visqueux du LCR, ainsi que le caractère non-linéaire du matériau constituant le cerveau.

Références

- [1] A. Hault-Dubrulle, Contribution à l'amélioration des connaissances des phénomènes d'interaction fluide-structure à l'intérieur de la boîte crânienne soumise à une sollicitation dynamique : études expérimentales et numériques, Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 6 juillet 2007
- [2] A. Deb, T. Ali, A lumped parameter-based approach for simulation of automotive headform impact with counter-measures, *Int. J. Impact Eng.* 30 (2004) 521–539
- [3] S.W. Gong, H.P. Lee, C. Lu, Computational simulation of the human head response to non-contact impact, *Comput. Struct.* 86 (2008) 758–770
- [4] R. Willinger, H.S. Kang, B.M. Diaw, Développement et validation d'un modèle mécanique de la tête humaine, *C.R. Acad. Sci. Paris, t.327, Série II B* (1999) 125–131
- [5] S. Roth, J-S. Raul, R. Willinger, Biofidelic child head FE model to simulate real word trauma, *Comput. Methods Programs Biomed.* 39 (2008) 262–274
- [6] Z. Zong, H.P. Lee, C. Lu, A three-dimensional human head finite element method and power flow in a human head subject to impact loadin, *J. Biomech.* 39 (2006) 284–292
- [7] P. Rungen, Enrichissement des modèles physique et numérique de la tête en vue de mieux représenter la cinématique cérébrale lors d'un choc, Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 1^{er} juillet 2005
- [8] A. El Baroudi, F. Razafimahery, L. Rakotomanana. Parametric Modal Analysis of Brain-Csf-Skull system, Influence of fluid-Structure Interaction, *Eur. J. Computational Mech.* 18/1 (2009)
- [9] H.J.-P. Morand, R. Ohayon, *Fluid Structure Interaction*, John Wiley & Sons, 1995
- [10] Comsol Multiphysics, *Modeling Guide*, Version 3.5a, November 2008
- [11] O. Halabich, J.W.L. Wan, Simulating Mechanism of Brain Injury During Closed Head Impact, *Lecture Notes in Computer Science, Biomed. Sim.* (2008) 107–118
- [12] M. Mellado, R. Rodríguez, Efficient solution of fluid-structure vibration problems, *Appl. Numer. Math.* 36 (2001) 389–400
- [13] A. Bermúdez, R. Rodríguez, D. Santamarina, Finite element approximation of a displacement formulation for time-domain elastoacoustic vibrations, *J. Comput. Appl. Math.* 152 (2003) 17–34
- [14] A. El Baroudi, F. Razafimahery, N. Bideau, L. Rakotomanana, Influence of the fluid-structure interaction in biomechanics: Application to parametric modal analysis and dynamics of the aorta under a shock. To appear in *Int. J. Biomed. Eng. Technol. (IJBET)*
- [15] N. Bideau, B. Mahiou, L. Monier, F. Razafimahery, L.R. Rakotomanana, B. Bideau, G. Nicolas, 2D dynamical efficiency of a swimfin: a fluid-structure interaction approach, *Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng. Toulon* (2009)
- [16] A. Hault-Dubrulle, P. Drazetic, F. Razafimahery, Etude des phénomènes d'interaction fluide/structure lors d'un choc à l'intérieur de la boîte crânienne, 17^e Congrès Français de Mécanique, Troyes, septembre 2005