

# Optimisation aéro-structurale de la voilure d'un avion d'affaires par un jeu de Nash et un partage adapté des variables

BADR ABOU EL MAJD<sup>1</sup>, JEAN-ANTOINE DÉSIDÉRI<sup>2,a</sup> ET ABDERRAHMANE HABBAL<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Université d'Avignon et des Pays du Vaucluse, Département de Mathématiques, 33 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon, France

<sup>2</sup> INRIA Equipe-Projet OPALE, Centre de Sophia Antipolis Méditerranée, 2004 Route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex, France

<sup>3</sup> Université de Nice Sophia Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France

Reçu le 15 juillet 2010, accepté le 15 juillet 2010

**Résumé** – On s'intéresse au problème de l'optimisation multidisciplinaire, lorsque les disciplines sont prises en compte par des critères qui sont des fonctionnelles de solutions distribuées d'équations aux dérivées partielles. Pour le cas de deux disciplines, on propose une stratégie dans laquelle l'optimisation est décomposée en deux phases : (a) une phase d'optimisation coopérative au cours de laquelle les critères sont améliorés à chaque itération, et (b) une phase d'optimisation concurrentielle réalisée par un jeu de Nash associé à un partage adapté des variables.

**Mots clés** : Ingénierie concurrente / gradients / hessiens / systèmes propres / jeu de Nash

**Abstract** – **Aerodynamic and structural optimization of a business-jet wingshape by a Nash game and an adapted split of variables.** This article focuses on multidisciplinary optimization in situations in which the different criteria that account for the various disciplines are functionals of distributed solutions of partial-differential equations. In the case of two disciplines, we propose a strategy in which the optimization process is carried out in two phases: (a) a cooperative-optimization phase throughout which both criteria improve at each iteration, and (b) an optional competitive-optimization phase by a Nash game associated with an adapted split of variables.

**Key words**: Concurrent engineering / gradients / Hessian matrix / eigensystem / Nash game

## 1 Introduction

L'optimisation numérique de forme de la voilure d'un avion civil ou militaire en aérodynamique compressible soulève de nombreuses questions méthodologiques d'optimisation complexe car le problème est à la fois :

- multiobjectif, car on vise généralement à extrémiser plusieurs critères liés aux coefficients aérodynamiques, généralement sous contraintes ;
- multipoint, car ces critères sont critiques dans des phases différentes de l'enveloppe de vol ; par exemple, la portance est critique en phase de décollage, d'atterrissage ou de manœuvre de vol subsonique, alors que réduire la traînée, qui conditionne la consommation en kérosène ou de manière équivalente le rayon d'action, est essentiel en régime transsonique ou supersonique de croisière ;

- multidisciplinaire, car d'autres paramètres régis par des disciplines physiques autres que l'aérodynamique du vol sont importants : la répartition des charges structurales et thermiques, les émissions sonores et chimiques des moteurs, la signature radar (pour un avion furtif), les contraintes de mécanique du vol, etc.,

sans même mentionner les contraintes de fabrication. Ces différentes disciplines physiques sont régies, dans les modèles de plus « grande fidélité », par des systèmes distribués, c'est-à-dire des équations aux dérivées partielles (EDP) posées dans un domaine d'espace, tels que les équations d'Euler ou de Navier-Stokes pour l'aérodynamique, les équations de l'élasticité, de la thermique, de l'aéro-acoustique, ou de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), etc. Dans ces différents domaines, les progrès des techniques numériques, notamment par volumes ou éléments-finis, permettent aujourd'hui des simulations couplées de ces EDP. Les critères à optimiser sont alors des fonctionnelles des champs qui en résultent,

<sup>a</sup> Auteur pour correspondance :  
[desideri@sophia.inria.fr](mailto:desideri@sophia.inria.fr)

et leur évaluation précise est possible, mais généralement assez coûteuse. Pour ces raisons, concevoir des méthodes aussi générales, robustes et économiques que possible pour optimiser concurremment plusieurs critères issus de physiques différentes est un défi aux experts du calcul, dont certains qualifient cette problématique d'« ingénierie concurrente ».

Dans notre équipe, nous réalisons des optimisations aérodynamiques de voilure par des techniques d'optimisation de forme paramétrique. On note  $Y \in \mathbb{R}^N$  le vecteur de conception. Typiquement, on utilise l'approche par Free-Form Deformation (FFD) [1] dans laquelle une géométrie initiale, ici donnée par un maillage tridimensionnel non structuré de volumes finis, est déformée par l'optimisation au moyen d'une transformation ponctuelle (3D) ayant pour support une « boîte » contenant la forme (2D) à optimiser, c'est-à-dire ici la surface de la voilure. Par exemple, on utilise fréquemment une déformation dans la base des produits tensoriels de trois polynômes de Bernstein, chacun associé à une direction de coordonnées, et de degré donné, ce qui généralise la représentation de Bézier. Les  $N$  composantes du vecteur  $Y$ , nos variables de conception, sont alors des coordonnées ajustables de points de contrôle. Noter qu'on optimise la forme indirectement par le biais de la représentation symbolique posée a priori de sa déformation volumique, complètement indépendamment de la CAO utilisée préalablement pour construire le maillage initial. En procédant de la sorte, on court-circuite le problème de la reconstruction d'un maillage admissible dont une frontière a été déformée, puisque nos variables servent à déplacer globalement et continûment tous les nœuds du maillage volumique, qu'ils appartiennent à la frontière ou non. Notons que si la technique FFD, issue de l'infographie, a, en général, le potentiel d'engendrer de grandes déformations, elle est utilisée ici, en aérodynamique externe, pour représenter globalement et continûment, de petites déformations de maillage, à topologie constante, sans grande distorsion. On pourra trouver des illustrations de cette approche dans [2] ainsi que des algorithmes multiniveaux inspirés des techniques multigrilles.

Ce cadre étant fixé, examinons maintenant comment le problème multiobjectif peut être traité. Une approche classique consiste à identifier numériquement la surface des points Pareto-optimaux. On rappelle qu'il s'agit des points de l'espace admissible dominés par aucun autre. Pour identifier ce front, Srinivas et Deb [3] ont proposé un algorithme très efficace : NSGA (*Non-dominated sorting genetic algorithm*). Il s'agit d'un algorithme génétique dans lequel on classe la population par fronts successifs de solutions non-dominées, et on définit la fonction d'adaptation au moyen de l'indice de front. Noter que Goldberg [4] a apporté un raffinement à l'algorithme par une technique de *niching* qui permet d'éviter l'accumulation de points proches sur un même front. Cet algorithme, désormais classique, est très puissant ; par expérience on sait qu'il s'applique à des cas de front non convexe et même non continu. Mais l'algorithme est très coûteux car le front optimal est identifié comme l'enveloppe de toute

une population que l'on fait évoluer au cours de nombreuses générations.

Comme alternative à l'identification du front des solutions Pareto-optimales, on explore la possibilité d'atteindre économiquement des solutions de compromis entre disciplines en réalisant des équilibres de Nash. On considère le cas de l'optimisation de forme vis-à-vis de deux disciplines A et B représentées par les critères  $J_A$  et  $J_B$ , fonctions supposées régulières du vecteur  $Y \in \mathbb{R}^N$  des variables de conception. Pour cela, on partage le vecteur  $Y$  en deux sous-vecteurs  $Y_A$  et  $Y_B$ ,

$$Y = (Y_A, Y_B)$$

On utilise ces sous-vecteurs comme stratégies de deux joueurs virtuels qui optimisent respectivement  $J_A$  et  $J_B$  en tenant compte de la stratégie de l'autre jusqu'à ce qu'un équilibre soit atteint. Dans ce cas, on dit que  $\bar{Y} = (\bar{Y}_A, \bar{Y}_B)$  réalise un équilibre de Nash [5] si :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_A &= \text{Argmin}_{Y_A} J_A(Y_A, \bar{Y}_B), \\ \text{et } \bar{Y}_B &= \text{Argmin}_{Y_B} J_B(\bar{Y}_A, Y_B) \end{aligned}$$

En pratique, cet équilibre peut être atteint par un algorithme itératif dans lequel chaque joueur effectue, en parallèle à l'autre, un certain nombre d'itérations d'optimisation de son critère propre avant d'échanger son meilleur itéré avec l'autre, et ceci jusqu'à convergence couplage. Ainsi, chaque discipline utilise sa propre méthode d'analyse adaptée à son propre jeu d'EDP, et son propre optimiseur, et n'interagit avec l'autre que par l'échange de variables communes de conception. La convergence d'un algorithme itératif de ce type peut poser problème. Notons qu'on peut la faciliter en introduisant un mécanisme d'amortissement dans les critères [6]. En outre, la formulation du jeu que nous proposons ultérieurement, par continuation, permet précisément de garantir l'existence d'un équilibre de Nash dans tout voisinage de l'optimum monodiscipline initial. On pourra trouver des illustrations de telles optimisations multicritères en aérodynamique dans [7] et [8], et en électromagnétisme dans [9].

Comme on l'a mis en évidence dans [8] le choix qui est fait a priori du partage des variables, désigné ici partage de territoire, seul détermine la pertinence du compromis atteint à l'équilibre. De plus, des choix non physiques ne permettent pas d'atteindre cet équilibre. Par ailleurs, dans sa thèse [10], Abou El Majd a montré dans le cas d'un couplage aéro-structural, que l'aérodynamique est une discipline fragile, car sans précaution particulière, on peut atteindre un équilibre de Nash n'ayant aucune pertinence aérodynamique car le couplage induit des variations de forme non admissibles. On a bâti une stratégie algorithmique adaptée à cette situation (Sect. 2). L'approche est ensuite élargie pour inclure une phase d'optimisation coopérative préalable (Sect. 3).

## 2 Cas d'une discipline fragile : l'aérodynamique

Au plan théorique, on a proposé dans [11] une méthodologie pour le traitement numérique d'un problème d'optimisation concourante dans lequel deux critères sont à considérer, l'un,  $J_A$ , étant plus critique que l'autre,  $J_B$ . On rappelle ici les étapes de notre construction et les principaux acquis théoriques généraux, puis on les applique à l'optimisation aéro-structurale de voilure.

A convergence de la minimisation, éventuellement sous contraintes, de la seule fonctionnelle principale,  $J_A$ ,  $Y = Y_A^*$ , et des approximations du gradient,  $\nabla J_A^*$ , et de la matrice hessienne,  $H_A^*$ , ainsi que des  $K$  gradients de contraintes actives,  $\{\nabla g_k^*\}$  ( $k = 1, \dots, K$ ), sont par hypothèse disponibles ou calculées en utilisant des *métamodèles*. On identifie alors la matrice orthogonale  $\Omega$  des vecteurs propres de la matrice hessienne réduite  $H'_A = PH_A^*P = \Omega H''_A \Omega^t$ , où  $P$  est la matrice de projection orthogonale aux gradients de contraintes,  $H''_A$  est diagonale et semi-définie positive. On fait précisément l'hypothèse de convexité selon laquelle seules  $K$  valeurs propres de  $H'_A$  sont nulles et les autres strictement positives. On propose alors le partage suivant :

$$Y = Y_A^* + \Omega \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} := Y(U, V) \quad (1)$$

où les sous-vecteurs  $U \in \mathbb{R}^{N-p}$  et  $V \in \mathbb{R}^p$  ( $p \leq N-K-1$ ; ajustable) deviennent les nouvelles variables d'optimisation des critères  $J_A$  et

$$J_{AB} = J_A/J_A^* + \varepsilon [J_B/J_B^* - J_A/J_A^*] \quad (2)$$

respectivement. Ces définitions étant posées, on cherche, pour différentes valeurs du paramètre de continuation  $\varepsilon \in [0, 1]$ , le point d'équilibre de Nash  $\bar{Y}_\varepsilon = Y(\bar{U}_\varepsilon, \bar{V}_\varepsilon)$  entre les critères  $J_A$  (sous contraintes) et  $J_{AB}$  (sans contraintes). Notre théorème établit essentiellement trois résultats [11] :

1. l'optimalité du choix de la matrice de partage  $\Omega$  par hiérarchisation des sensibilités de  $J_A$  ;
2. l'existence pour  $\varepsilon = 0$ , de l'équilibre de Nash  $\bar{Y}_0 = Y_A^*$ , et par continuité, l'existence quand  $\varepsilon$  varie d'un continuum d'équilibres de Nash ;
3. l'insensibilité au second-ordre près du critère principal  $J_A$  aux variations de  $\varepsilon$ , une propriété que l'on peut interpréter comme une forme de robustesse ( $J_A(\bar{Y}_\varepsilon) = J_A^* + O(\varepsilon^2)$ ).

Ces propriétés générales ont d'abord été mises en évidence dans le cas d'un problème simple de minimisation de formes quadratiques en dimension finie soumis à une contrainte d'égalité linéaire ou non-linéaire [11].

La méthodologie est ici illustrée en traitant un exercice de mécanique, académique mais difficile, dans lequel on optimise la voilure d'un avion d'affaires vis-à-vis de deux critères, l'un aérodynamique, l'autre structural. Une géométrie initiale est donnée sous la forme d'un maillage extérieur non structuré en tétraèdres.

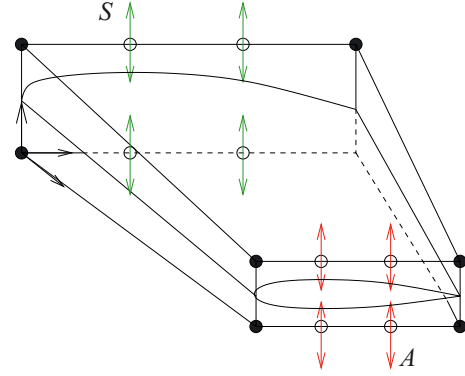


Fig. 1. Illustration de la paramétrisation du champ de déformation par la technique FFD.

En aérodynamique, on simule l'écoulement compressible extérieur par résolution en volumes-finis des équations d'Euler en trois dimensions d'espace, et on minimise le coefficient de traînée d'onde sous contrainte de portance, traitée par pénalisation :

$$J_A = \frac{C_D}{C_{D_0}} + 10^4 \max \left( 0, 1 - \frac{C_L}{C_{L_0}} \right) \quad (3)$$

La contrainte sur la portance rend le problème de réduction de traînée équivalent à la maximisation du rayon d'action à masse totale donnée.

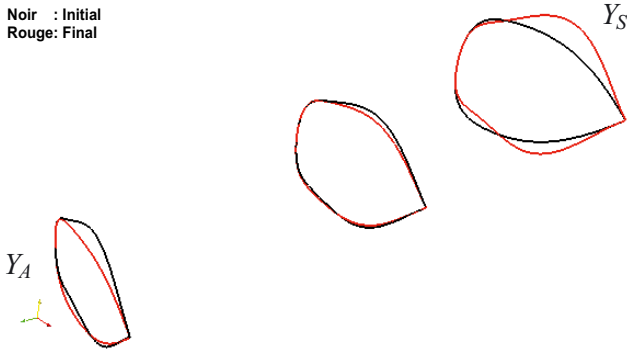
En calcul des structures, on traite la voilure comme une coque mince régie par les équations de l'élasticité linéaire (code ASTER d'EDF), et on cherche à réduire un critère intégral de contrainte mécanique sous restriction de volume et surface extérieure :

$$J_B = J_S = \iint_S \|\sigma \cdot n\| dS + K_1 \max \left( 0, 1 - \frac{V}{V_A} \right) + K_2 \max \left( 0, \frac{S}{S_A} - 1 \right) \quad (4)$$

Les contraintes sur le volume et la surface sont introduites pour favoriser les solutions correspondant à des géométries effectives de coque.

Les deux disciplines partagent le même jeu de variables de forme qui sont ici les déplacements de points de contrôle situés sur les arêtes d'une boîte englobante. Ces paramètres interviennent dans une formule explicite qui définit un *champ de déformation*, nul à l'extérieur de la boîte, qu'on applique aux seuls noeuds intérieurs, selon la technique de *Free-Form Deformation* [1, 2]. La figure 1 illustre cette technique de paramétrisation dans un cas où les degrés de liberté sont 8 déplacements verticaux ajustables, dont 4 sont situés en emplanture de l'aile et les 4 autres en bout d'aile, les 8 sommets de la boîte étant maintenus fixes dans la déformation.

Dans une première expérience numérique (non reproduite ici), on a mené à convergence complète l'optimisation de tous les paramètres géométriques vis-à-vis du seul critère aérodynamique  $J_A$  afin d'établir l'optimum



**Fig. 2.** Déformation en bout d'aile (à gauche), à mi-corde et en emplanture correspondant à un équilibre de Nash effectué sur les variables primitives.

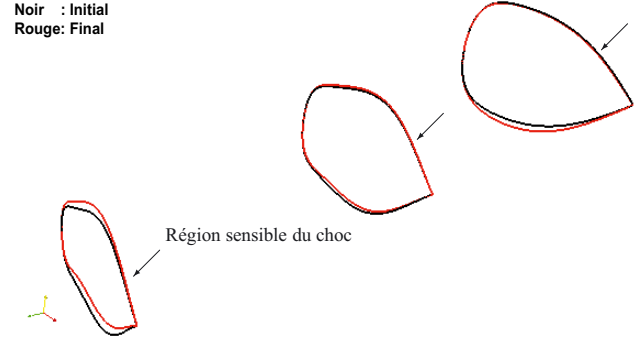
aérodynamique absolu dans l'espace paramétrique complet. On a ensuite calculé une base de données de valeurs du critère principal  $J_A$  correspondant à des configurations proches de l'optimum monodiscipline,  $Y = Y_A^*$ . Cette base a servi à construire un métamodèle par *réseau de neurones artificiel* modélisant le comportement approché du critère  $J_A$ .

Dans les deux expériences suivantes, on a établi l'équilibre de Nash entre le métamodèle aérodynamique et le modèle structural, pour deux partages particuliers des variables de déformation.

Dans la première, après de nombreux essais infructueux de partage des variables primitives, on a obtenu un résultat physiquement acceptable en affectant les 4 paramètres d'emplanture à la minimisation du critère structural  $J_S$  (notés S sur la Fig. 1), et les 4 paramètres en bout d'aile à la minimisation du critère aérodynamique (notés A). Les déformations correspondantes sont représentées à la figure 2. On constate que les paramètres structuraux, à l'emplanture, tendent à arrondir l'aile pour mieux répartir le chargement; les paramètres aérodynamiques, en bout d'aile, au plus près de la zone où le choc est intense, tendent à limiter la perte de performance aérodynamique.

Dans la deuxième expérience, le métamodèle sert d'abord à calculer un hessien approché dont la diagonalisation permet de partager l'espace paramétrique  $\mathbb{R}^8$  en deux sous-espaces supplémentaires de dimension 4, chacun affecté à la minimisation d'une discipline, selon (1) avec  $N = 8$  et  $p = 4$ . À l'équilibre de Nash, on obtient les déformations représentées à la figure 3. On constate que ce nouveau partage préserve automatiquement la géométrie dans la région sensible du choc tout au long de l'extrados.

Dans une dernière expérience, on a réutilisé le partage issu de la diagonalisation du hessien pour établir l'équilibre de Nash entre le vrai modèle aérodynamique, par les équations d'Euler, et le modèle structural. L'évolution correspondante des sections est représentée à la figure 4, la convergence des critères et les champs surfaciques de Mach à la figure 5. On observe une réduction du critère structural d'environ 8%, au prix d'une augmentation de seulement 3% du critère aérodynamique,



**Fig. 3.** Déformation en bout d'aile (à gauche), à mi-corde et en emplanture correspondant à un équilibre de Nash effectué après un partage issu de la diagonalisation du hessien.

préservant ainsi à peu près l'écoulement préalablement optimisé vis-à-vis du seul critère aérodynamique (faible augmentation de l'intensité du choc, en rouge à la Fig. 5).

### 3 Généralisation : stratégie d'optimisation à deux disciplines

La stratégie de partage de territoire de la section précédente, valable lorsque l'une des disciplines est prépondérante ou fragile, et initialement optimisée seule, est ici généralisée au cas où le point de départ  $Y^0$  est quelconque. Pour simplifier, on considère ici le cas d'optimisation sans contrainte. À nouveau, on suppose que gradients et hessiens sont disponibles quitte à construire des métamodèles pour les approcher. Sans perte de généralité, ni de régularité, et sans changer le sens de l'équilibre de Nash associé à un partage des variables donné, il est toujours possible, par changement de variables et normalisation [12], de reformuler le problème de sorte que les critères aient les propriétés suivantes : être sans dimension, uniformément positifs, infinis lorsque  $\|Y\|$  est infini, de valeur 1 avec des gradients de norme 1 initialement (pour  $Y = Y^0$ ).

Notre algorithme s'appuie sur un principe d'évidence : tout point qui n'est pas Pareto-optimal est améliorable vis-à-vis des deux critères simultanément. Cette observation nous conduit à proposer la définition suivante :

*Définition [Pareto-stationnarité] : soit deux critères  $J_A$  et  $J_B$  fonctions régulières (disons  $C^2$ ) du vecteur  $Y \in \mathbb{R}^N$ . On dit que le point  $Y^0$  est Pareto-stationnaire vis-à-vis des critères  $(J_A, J_B)$  s'il existe une combinaison convexe  $\alpha J_A + (1 - \alpha) J_B$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) stationnaire en  $Y^0$ .*

On peut classer les points Pareto-stationnaires en trois types selon le nombre de gradients nuls :

1. Type a :  $\nabla J_A^0 = \nabla J_B^0 = 0$
2. Type b :  $\nabla J_A^0 = 0$  et  $\nabla J_B^0 \neq 0$  (ou vice versa)
3. Type c :  $\nabla J_A^0 + \lambda \nabla J_B^0 = 0$  avec  $\lambda = \frac{1-\alpha}{\alpha} > 0$ , ce qui est la condition de stationnarité satisfaite par les points Pareto-optimaux. (Stationnarité du lagrangien :  $\mathcal{L} := J_A + \lambda (J_B - C)$ .)

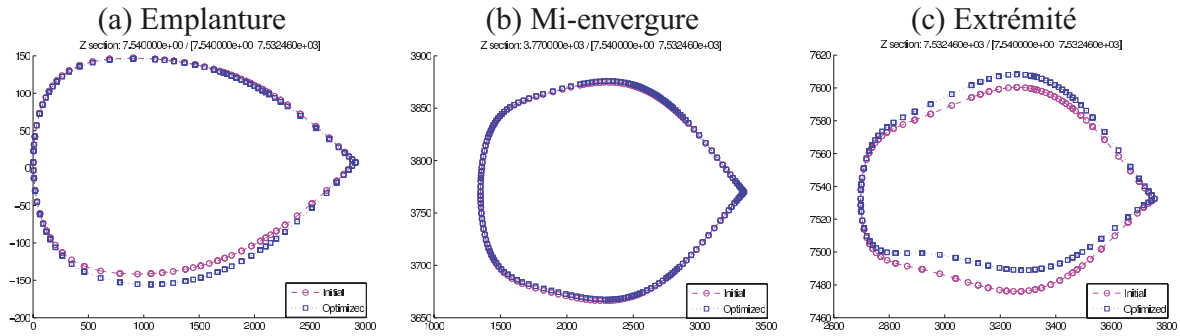
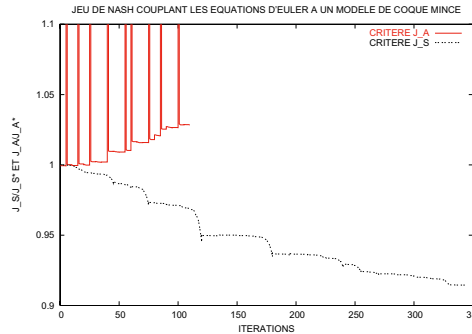


Fig. 4. Evolution des sections par le jeu de Nash entre modèle fluide eulérien et modèle structural pour un partage des variables issu de la diagonalisation du hessien.

(a) Convergence des critères



(b) Optimum aérodynamique initial

(c) Equilibre de Nash aéro-structural

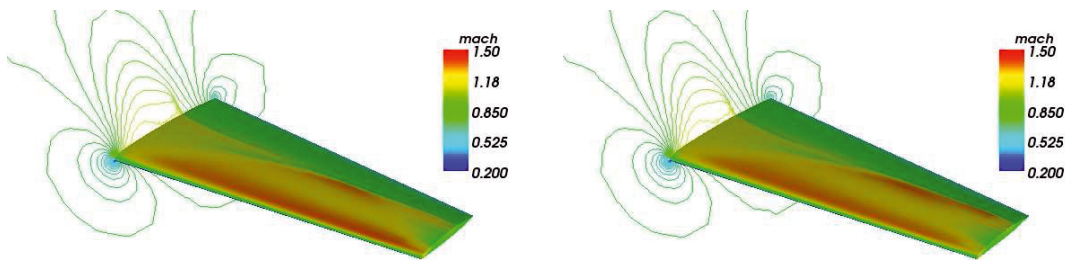


Fig. 5. Optimisation aéro-structurale d’une voilure; partage des variables par décomposition orthogonale : (a) historique de convergence des critères (après 50 couplages à partir de l’optimum aérodynamique initial); champ de nombre de Mach correspondant à : (b) l’optimum aérodynamique initial (solution de référence), et (c) l’équilibre de Nash associé au partage des variables par décomposition orthogonale.

Lorsque les critères sont localement convexes, la stratégie à adopter dans le cas où  $Y^0$  est Pareto-stationnaire est assez évidente suivant le type :

1. Pareto-stationnarité de type a :  $\nabla J_A^0 = \nabla J_B^0 = 0$ . Dans ce cas exceptionnel où les deux critères sont simultanément (localement) minimaux, on interrompt l’optimisation ;
2. Pareto-stationnarité de type b : disons  $\nabla J_A^0 = 0$  et  $\nabla J_B^0 \neq 0$ . Alors  $J_A$  est minimum, et  $J_B$  perfectible : on bien on s’arrête, ou bien on est ramené au cas de

la section précédente, pour lequel un jeu de Nash avec un certain partage de territoire fait sens ;

3. Pareto-stationnarité de type c :  $\nabla J_A^0 + \lambda \nabla J_B^0 = 0$  ( $\lambda > 0$ ). Dans ce cas, le point est Pareto-optimal et l’optimisation est interrompue.

Ces résultats s’aménagent au cas de critères non convexes par examen des systèmes propres des matrices hessiennes,  $H_A^0$  et  $H_B^0$ . Nous ne pouvons donner le détail ici. Néanmoins, notons que le cas d’un point  $Y^0$  Pareto-stationnaire de type c se ramène à celui de Pareto-stationnarité de type a dans l’hyperplan orthogonal à

la direction commune  $u_{AB}$  des gradients, ce qui conduit à examiner les systèmes propres des matrices hessiennes réduites :

$$H_A^0 = P_{AB} H_A^0 P_{AB} \quad H_B^0 = P_{AB} H_B^0 P_{AB}$$

où  $P_{AB}$  est la matrice de projection  $P_{AB} = I - [u_{AB}][u_{AB}]^t$ . Enfin, dans le cas banal inverse où  $Y^0$  n'est pas Pareto-stationnaire, on peut poser :

$$u = \nabla J_A^0 \quad v = \nabla J_B^0 \quad w = (\|v\| u + \|u\| v) / (\|v\| + \|u\|).$$

Il est alors facile de montrer que

$$w \cdot u > 0 \quad w \cdot v > 0$$

Autrement dit, la direction  $-w$  est une direction de descente pour les deux critères simultanément. On fait donc un pas dans la direction de  $-w$ , on recalcule les gradients, et si le point atteint n'est pas Pareto-stationnaire, on recommence, et ainsi de suite.

Deux éventualités sont possibles. Ou bien on atteint un point Pareto-stationnaire en un nombre fini de pas, et on a déjà défini notre stratégie dans ce cas. Ou bien la suite est infinie, mais alors :

- Les suites infinies de valeurs des critères  $\{J_{Ai}\}$  et  $\{J_{Bi}\}$  qui sont strictement monotones-décroissantes et positives, sont alors également bornées.
- Puisque les critères sont infinis à l'infini, la suite des points de conception  $\{Y^i\}$  est elle-même bornée.
- Il existe donc un sous-suite infinie convergente. Soit  $Y^*$  la limite.

On fait la conjecture que le point  $Y^*$  est lui-même Pareto-stationnaire, ce qui nous ramène au cas précédent. (Sinon on réinitialise  $Y^0$  à  $Y^*$ .)

En conclusion, dans le cas général, on propose de conduire d'abord un plan d'expérience à partir d'un jeu convenable de valeurs du point de départ  $Y^0$ , puis, à partir de chaque point, conduire une phase d'« optimisation coopérative », à chaque itération de laquelle les deux critères diminuent simultanément, et jusqu'à atteindre un point Pareto-stationnaire, alors, s'arrêter, ou conduire une phase d'« optimisation concurrentielle » par un jeu de Nash associé à un partage de territoire basé sur l'analyse des systèmes propres des matrices hessiennes locales.

Enfin, pour ce qui est de la phase d'optimisation coopérative, d'autres choix sont possibles de la direction

de descente commune : pour un choix général dans le cas de  $n$  disciplines voir [12].

## Références

- [1] T.W. Sederberg, S.R. Parry, Free-From Deformation of Solid Geometric Models, *Comput. Graph.* 20 (1986) 151–160. See also: Computer aided geometric design, T.W. Sederberg, <http://tom.cs.byu.edu/~tom/> (Item : Courses)
- [2] B. Abou El Majd, J.-A. Désidéri, R. Duvigneau, Multilevel strategies for parametric shape optimization in aerodynamics, *Eur. J. Comput. Mech.* 17 (2008)
- [3] N. Srinivas, K. Deb, Multi-objective function optimization using non-dominated sorting genetic algorithms, *Evol. Comput.* 2 (1995) 221–248
- [4] D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison Wesley Company Inc. (1989)
- [5] J.F. Nash, Non-Cooperative Games, *Ann. Math.* 54 (1951) 286–295
- [6] H. Attouch, P. Redont, A. Soubeyran, A new class of alternating proximal minimization algorithms with cost-to-move, *SIAM J. Optim.* 18 (2007) 1061–108
- [7] J.F. Wang, *Optimisation Distribuée Multicritère par Algorithmes Génétiques et Théorie des Jeux & Application à la Simulation Numérique de Problèmes d'Hypersustentation en Aérodynamique*, Ph.D. thesis, University of Paris 6, 2001. Spéc. : Math. App.
- [8] Z. Tang, J.-A. Désidéri, J. Périaux, Multi-Criterion Aerodynamic Shape-Design Optimization and Inverse Problems Using Control Theory and Nash Games, *J. Optim. Theory Appl.* (2007)
- [9] M. Sefrioui, *Algorithmes Évolutionnaires pour le Calcul Scientifique, Application à l'Électromagnétisme et à la Mécanique des Fluides Numérique*, Ph.D. thesis, Paris 6, Paris, France, 1998
- [10] B. Abou El Majd, *Algorithmes hiérarchiques et stratégies de jeux pour l'optimisation multidisciplinaire – Application à l'optimisation de la voilure d'un avion d'affaires*. Ph.D. thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2007
- [11] J.-A. Désidéri, Split of Territories in Concurrent Optimization, Research Report 6108, INRIA, June 2007, <https://hal.inria.fr/inria-00127194>
- [12] J.-A. Désidéri, Multiple-Gradient Descent Algorithm (MGDA), Research Report 6953, INRIA, 2009, <http://hal.inria.fr/inria-00389811/fr/>