

Étude dynamique et thermique d'un écoulement pulsé en présence d'un solide chauffé en rotation

ABDERRAHMANE GHEZAL^{1,a}, ZOHRA OUCHIHA¹, BERNARD PORTERIE², DAMIEN VEYRET²
ET JEAN CLAUDE LORAUD²

¹ Institut de Physique, USTHB, BP 32, El-Alia, Bab-Ezzouar, Alger, Algérie

² I. U. S. T. I., Université de Provence-CNRS, UMR 6595, Marseille, France

Reçu le 8 novembre 2007, accepté le 1 novembre 2010

Résumé – Ce travail s'intéresse à un écoulement autour d'un obstacle cylindro-conique chauffé, en rotation à l'intérieur d'une cavité cylindrique. Il s'agit d'étudier l'influence d'une perturbation de type harmonique sur le comportement dynamique de l'écoulement et sur le mécanisme de l'échange thermique avec l'obstacle. La fréquence de référence de l'écoulement périodique a été déterminée par l'analyse de l'évolution du régime vers son état stationnaire. L'étude a été menée pour des fréquences variant de 1/3 de la fréquence de référence à 10 fois cette dernière. La périodicité de l'écoulement est assurée par la condition d'entrée sur le débit supposé périodique. L'étude numérique a été réalisée pour des valeurs du nombre de Reynolds inférieur à 100 et pour des valeurs de nombre de Taylor inférieur à 500 afin d'éviter la présence des instabilités au sein de l'écoulement. Deux méthodes numériques ont été utilisées : une méthode de différences-finies combinée avec un schéma ADI et la méthode des éléments-finis. Le fluide considéré est l'air avec des propriétés physiques constantes. Le couplage convection-conduction a été considéré dans une plage de variation du rapport K de la conductivité thermique du solide à celle du fluide de 10^{-2} à 10^3 . Les résultats montrent que les composantes de la vitesse varient en phase avec le débit, alors que la pression et les différents paramètres thermiques sont en déphasage avec la vitesse d'entrée. On note aussi l'aspect périodique de tous les paramètres dynamiques et thermiques de l'écoulement pour les nombres de Reynolds utilisés. L'influence de la fréquence se manifeste davantage pour ses valeurs élevées. Le nombre de Nusselt est proportionnel à la fréquence. Ces résultats sont en bon accord avec ceux donnés par d'autres études de référence.

Mots clés : Stationnaire / solide chauffé / pulsé / rotation / différences-finies / éléments-finis / ADI / FIDAP

Abstract – **Dynamic and thermal study of a pulsatile flow in presence of a heated rotating solid.** This work concerns the dynamic and the thermal study between a heated rotating solid and a pulsatile flow evolving periodically in a cylindrical cavity. The reference frequency of pulsatile flow was determined by the evolution regime to his stationary state. The frequency varied from the 1/3 reference frequency to 10 once this value. The periodicity is assured by the periodical inlet conditions. The numerical study concerns the Reynolds number less than 100 and the Taylor number less than 500, in order to avoid the presence of instabilities in the flow. Two numerical methods have been used; the finite-elements method and the finite-differences combined with ADI scheme. The fluid considered is the air with constant physical properties. The influence of ratio conductivity, K , between solid conductivity and fluid conductivity, has taken from $K = 10^{-2}$ to $K = 10^{+3}$. The influence of the two periodical combined motions; rotation of the solid and axial flow, on the thermal transfer mechanism is studied. The results show that the velocity components are in phase with the rate flow but the pressure and the different thermal parameters are in difference of phase. We note also the oscillatory shape of different dynamical and thermal parameters. The frequency influence appears at the greater values. The Nusselt number is proportional to the frequencies. The results are in good agreement with previous numerical and experimental studies.

Key words: Unsteady / heated solid / pulsatile / rotation / finite-elements / finite-differences / ADI / FIDAP

^a Auteur pour correspondance : abdghezal@yahoo.fr

Nomenclature

a	Longueur de référence, $2d$
C_p	Capacité calorifique
d	Diamètre de l'orifice
k	Conductivité thermique
K	Rapport des conductivités thermiques k_s/k_f
L	Longueur de la cavité
Nu	Nombre de Nusselt local
n	Normale à la paroi
P	Perturbation de pression adimensionnelle
Pe	Nombre de Peclet = $RePr$
Pr	Nombre de Prandtl, $Pr = \mu c_{pf}/k_f$
Q	Flux de chaleur
Re	Nombre de Reynolds $Re = aw_e/\nu$
r	Coordonnée radiale adimensionnelle
R	Rayon de la cavité
t	Temps dimensionnel
T_0	Température ambiante
T_{moy}	Température moyenne
Ta	Nombre de Taylor
u, v, w	Composante adimensionnelle du vecteur vitesse
$\mathbf{U}$	Vecteur vitesse adimensionnelle
z	Coordonnée axiale adimensionnelle
Symboles grecs	
α_s	Diffusivité thermique du solide, $k_s/\rho\rho_{ps}$
μ	Viscosité dynamique du fluide
ρ	Masse volumique
θ	Demi-angle du cône
ε	Perturbation relative de l'amplitude
ω	Pulsation
τ	Période, constante de temps
ϕ	Angle de phase
Indices	
e	Relatif à l'entrée de la cavité
f	Relatif au fluide
i	Relatif à z
j	Relatif à r
l	Relatif à la sortie de la cavité
n	Relatif à t
p	Relatif à la paroi du solide
s	Relatif au solide

1 Introduction

L'étude de l'écoulement pulsé dans une conduite a fait l'objet de nombreux travaux tant sur le plan expérimental que numérique. Les premiers travaux remontent à l'année 1929 lorsque Richardson et Tyler ont mis en évidence par des mesures expérimentales l'existence de l'une des caractéristiques principales de l'écoulement oscillant ; à savoir l'existence du maximum de la vitesse au voisinage des parois. Plus tard les analyses de Womorsley (1953) et Uchida (1956) ont confirmé ce résultat par l'analyse du mouvement sinusoïdal et pour d'autres types d'écoulement oscillant complètement développé d'un fluide incompressible dans une conduite horizontale. Ils ont proposé des solutions exactes pour le champ de température et au taux du transfert de chaleur. Uchida (1956) et Atabek (1961) [1] ont étudié l'écoulement instationnaire en conduite cylindrique, ils

ont développé une solution analytique pour le profil des vitesses en écoulement laminaire pulsé et développé dans un tube cylindrique en supposant que l'écoulement est établi très loin des entrées avec une vitesse débitante sous forme d'une expression polynomiale des pulsations. Drake (1965) [2] a considéré le cas de la conduite rectangulaire et Gedeon (1986) [3] celui entre plaque plane. En utilisant une méthode analytique à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et celle du transfert de chaleur, il a déduit une généralisation de la définition du coefficient du transfert de chaleur. Il a également montré qu'il existe un déphasage entre la différence de température et le flux de chaleur dans le cas d'un écoulement du fluide soumis à des pulsations rapides entre les plans parallèles d'un canal. Ce déphasage tend vers 90° pour les fréquences optimales.

La connaissance approfondie ainsi que le contrôle de ce type d'écoulement s'avère indispensable dans la maîtrise des principaux paramètres conduisant, par exemple, à l'amélioration du transfert de chaleur.

La variation périodique du débit ou du gradient de pression trouve de larges applications notamment dans le domaine acoustique. On note en particulier l'étude faite par Hueber [4] concernant l'influence de l'écoulement périodique sur le transfert thermique. Les résultats numériques montrent que de grandes valeurs du nombre de Reynolds combinées à de grandes fréquences font augmenter considérablement le flux de chaleur.

Dans une étude présentée par Andre et Creff [5], relative à la recherche des conditions particulières de fréquence favorisant les transferts thermiques en écoulements pulsés dans les canalisations cylindriques, il est montré que le nombre de Nusselt obtenu en écoulement pulsé décroît lorsque la fréquence augmente, conduisant à un régime d'échange identique à celui de l'écoulement moyen stationnaire. Ils concluent qu'il existe des conditions particulières de fréquences de pulsation favorise le transfert thermique en écoulement pulsé. Il est probable que la surmodulation de vitesse déclenche localement des mécanismes particuliers favorisant le transfert de chaleur tels que la création d'un courant de retour au sein du champ fluide durant une fraction de la période de pulsation du fait d'un taux de modulation supérieur à 100 % et l'existence d'une composante radiale de la vitesse non négligeable et autres paramètres.

Dans une étude numérique d'un écoulement pulsé dans une conduite rectangulaire, Yakhot et al. [6] montrent l'influence du rapport de forme et de la fréquence du gradient de pression imposé sur l'amplitude de la vitesse et le déphasage entre ce gradient de pression et la vitesse axiale. Ce déphasage varie de 0° pour les fréquences d'oscillations lentes à 90° pour les fréquences élevées des oscillations. André et Creff [5] ont réalisé une étude expérimentale caractérisée par des fréquences favorisant les transferts thermiques en écoulement pulsé dans une canalisation cylindrique pour un nombre de Reynolds moyen égale à $1,5 \times 10^5$. Sparow et Farias [7] se sont intéressés au problème de transfert du chaleur en régime transitoire dans le cas d'un écoulement laminaire incompressible et

stationnaire entre deux plaques parallèles. Des solutions analytiques concernant les températures du fluide et de paroi sont présentées pour différentes pulsations et positions sur le canal. Ils concluent que l'énergie transférée à la sortie d'un échangeur caractérisé par un nombre de Nusselt constant diffère assez peu de celle obtenue avec le schéma utilisant des conditions différentes.

Kakac et Yenner [8] ont obtenu une solution exacte dans le cas d'un écoulement forcé entre deux plaques parallèles. Les travaux de Suces [9] sont consacrés à l'analyse des transferts thermiques instationnaire entre un fluide en écoulement laminaire et une plaque plane. Cette étude numérique a été effectuée en utilisant une méthode aux différences-finies. Des résultats concernant les fonctions de réponse de la température de paroi et de la température moyenne du fluide sont développés et comparés à des solutions obtenues numériquement.

Acker et Forcher [10] se sont intéressés à la détermination de la réponse d'un module de stockage constitué de plaques parallèles balayées par un fluide caloporteur en écoulement laminaire. Les distributions de température dans le solide et le fluide sont présentées sous la forme de séries de fonctions orthogonales.

Singh et al. [11] ont étudié numériquement les fluctuations dynamiques et thermiques dues à la rotation périodique d'un disque. Les résultats montrent que la contrainte tangentielle augmente avec la fréquence tandis que la contrainte radiale diminue. La surface d'échange thermique n'est affectée que légèrement par la fluctuation de la vitesse de rotation. Une étude théorique faite par Aplet et al. [12] ont considéré le cas du transfert thermique dans un écoulement en régime transitoire et instationnaire autour d'une sphère chauffée pour des nombres de Reynolds compris entre 1 et 40. Trois cas du régime transitoires sont étudiés; une évolution pulsée du repos vers l'état stationnaire du nombre de Reynolds, une évolution croissante à 50 % de l'amplitude de la vitesse de l'état stationnaire et une variation sinusoïdale de la vitesse d'amplitude égale à 10 % de celle de l'écoulement moyen. Les résultats concernent aussi le transfert thermique transitoire associé à une température variable du cylindre. Dans le cas d'une variation sinusoïdale de la vitesse, le nombre de Reynolds oscille autour de la valeur moyenne Re égale à 10 allant de 9 à 11.

La fréquence angulaire a été choisie approximativement égale à l'inverse de la constante du temps thermique. La température est maintenue constante dans tout le cylindre. Les résultats montrent que la réponse quasi stationnaire, des différents coefficients dynamiques et thermiques, bien que périodique, n'est pas sinusoïdale, du fait de la non-linéarité avec le nombre de Reynolds, que le coefficient du transfert thermique a une amplitude inférieure à celle qui correspond au régime quasi-stationnaire; il est en déphasage de 41° par rapport au débit.

Ces résultats obtenus pour $Re = 10$ sont comparables à ceux trouvées par Davies [13] dans le cas de faibles nombres de Reynolds. Lachi et al. [14] ont réalisé une étude sur la caractérisation des échanges thermiques en régime variable dans un écoulement d'air en

convection forcée sur une paroi plane, soumise à trois différentes formes de puissance de chauffage périodique dans le temps. Les résultats montrent que les courbes de la température à la paroi évoluent d'une manière très étroitement liée à la forme et à la période de la densité du flux d'énergie imposé. Elles ont une forme qui oscille autour d'une valeur moyenne et une amplitude initialement faible et qui tend progressivement vers des valeurs presque établies, caractéristique du régime d'équilibre.

Majdalani et al. (2002) [15] ont déterminé la solution exacte des équations de Navier Stokes qui régit l'écoulement dans une canalisation sous l'influence d'un gradient de pression variable. Ce dernier est représenté par une somme de pulsations exprimé en termes de coefficients de Fourier. Zhao et al. (1994) [16] ont effectué une étude expérimentale et numérique sur un écoulement laminaire d'air oscillant, à l'intérieur d'un tube cylindrique, chauffé par un flux de chaleur uniforme. À partir des températures relevées sur plusieurs positions axiales et au niveau de la paroi intérieure du réchauffeur, ils ont obtenu une corrélation du nombre de Nusselt moyen à partir de la définition classique. Byung Hun Kim [17] dans sa thèse de Ph.D. intitulée la modélisation d'un écoulement pulsé (2003), montre expérimentalement l'influence de la géométrie, du débit et la fréquence de la pulsation sur les performances du système.

Fedele et al. (2004) [18] ont étudié la stabilité d'un écoulement pulsé dans une conduite. Les résultats montrent que la méthode d'Orr-Sommerfeld donne de meilleures précisions que la méthode de Chebyshev en utilisant le développement en séries de Galerkin.

Ali (2006) [19] a publié une étude sur le jet pulsé dans une conduite autour d'un cylindre chauffé. Les résultats montrent que le comportement des champs dynamiques et thermiques présente un aspect périodique similaire aux pulsations imposées surtout pour les faibles fréquences et les faibles amplitudes. Cet aspect périodique commence à disparaître pour les fréquences $Re_\omega > 128$ présentant des instabilités qui sont d'avantage visibles dans le plan de phase que dans le temps.

L'existence des tourbillons de Taylor dans ce genre d'écoulement a amené certains auteurs à étudier les phénomènes des instabilités dynamiques engendrées sous certaines conditions de l'écoulement. Mackrodt [20] a étudié la stabilité linéaire, d'un écoulement de Hagen. Poiseuille en contact avec une paroi rigide en rotation, et soumis à de petites fluctuations tridimensionnelles dans le cas des nombres de Reynolds finis et infinis. Les résultats trouvés montrent l'apparition des instabilités en fonction de la vitesse de rotation pour chaque débit. Oween et Pincombe [21] ont mis en évidence l'apparition des instabilités dynamiques lors de la superposition d'un écoulement axial à un mouvement de rotation pour des valeurs du nombre de Rossby, basé sur le rapport de la vitesse axiale du fluide à la vitesse de rotation de l'obstacle, comprises entre 0,3 et 1. Pour sa part Legrand [22] a montré dans une étude relative au transfert de masse dans un espace annulaire, entre un cylindre intérieur tournant et l'extérieur fixe, que le régime de l'écoulement

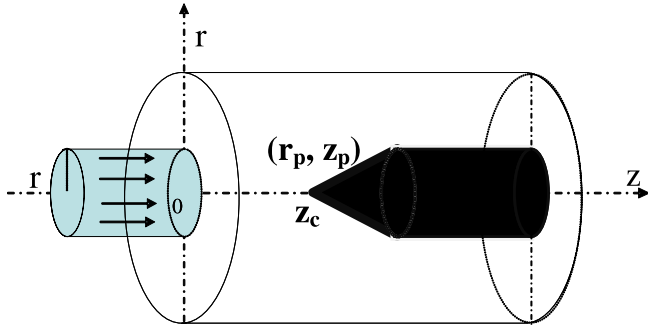


Fig. 1. Schéma général de l'étude.

secondaire (Tourbillons de Taylor) était produit par des nombres de Taylor variant de $2,8 \times 10^4$ à 5×10^4 , où Ta est le nombre de Taylor, ceci avec un débit axial de $Re_a = 300$, valeur à partir desquelles un troisième régime apparaît caractérisé par la présence de tourbillon, occupant la totalité de l'espace annulaire. Le régime laminaire évolue vers la turbulence à partir de $Ta = 10^5$.

On peut noter que malgré la multiplicité des travaux, tant anciens que nouveau, concernant les écoulements de ce type, rares sont les études qui prennent en compte la conduction dans l'obstacle (ou la paroi) et ses effets dans les équations du mouvement, de l'énergie et l'équation de la conduction dans le solide et le couplage des deux.

L'objectif de ce travail est l'étude de l'influence de la périodicité sur le comportement dynamique et thermique d'un écoulement confiné de fluide réel, autour d'un obstacle chauffé en rotation. L'analyse du régime transitoire permet d'évaluer le temps nécessaire à l'établissement du régime dont dépend le choix de la fréquence de l'écoulement périodique. Les résultats numériques ont été établis en utilisant deux méthodes : la première est de type différences-finies associée à un schéma ADI et la seconde est celle des éléments-finis.

2 Position du problème et modèle mathématique

2.1 Problème physique

On étudie le comportement dynamique et thermique d'un écoulement de fluide visqueux dans une conduite cylindrique autour d'un obstacle cylindro-conique chaud, en mouvement de rotation (Fig. 1). La vitesse du fluide dans la section d'entrée de la conduite est supposée sinusoïdale et parallèle à l'axe. L'échange thermique entre le solide et le fluide s'effectue par couplage. Initialement, l'obstacle immobile se trouve à une température de 400 K et le fluide est au repos à une température de 300 K, à la pression atmosphérique.

2.2 Équations adimensionnelles

Pour rendre adimensionnelles les équations, nous avons utilisé la longueur de référence $a = 2d$ et la vitesse

de référence w_e , la vitesse d'entrée du fluide. Les variables adimensionnelles sont alors :

$$Re = \frac{aw_e}{\nu}, \text{ est le nombre de Reynolds.}$$

$$Pr = \frac{\mu c_{fp}}{k_f}, \text{ est le nombre de Prandtl.}$$

$$Pe = PrRe, \text{ est le nombre de Peclet.}$$

Les dissipations visqueuses étant négligées, les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie du fluide en régime incompressible s'écrivent sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U}$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla T_f) = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T_f$$

Ce qui peut être explicité dans le cas d'un problème à symétrie axiale et en coordonnées cylindriques de la façon suivante en utilisant les variables adimensionnelles définies comme suit :

$$r = r'/a, z = z'/a, u = u'/w_e, v = v'/w_e, w = w'/w_e,$$

$$p = (p' - p_a)/\rho w_e^2, T = (T' - T_a)/T_a, t = t'/(a/w_e)$$

Les équations précédentes s'écrivent alors en coordonnées cylindriques comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \\ \times \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{Re} \\ \times \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{v}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \\ \times \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + u \frac{\partial T_f}{\partial r} + w \frac{\partial T_f}{\partial z} = \frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 T_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} \right] \quad (5)$$

La conduction à l'intérieur du solide est représentée par l'équation du Fourier :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha \Delta T_s \quad (6)$$

où α est la diffusivité relative du solide par rapport à celle de l'air $\alpha = \alpha_s/\alpha_f$.

La combinaison entre les équations (5) et (6) est assurée par la condition d'égalité du flux à l'interface entre le solide et le fluide qui s'exprime par :

$$\frac{\partial T_f}{\partial n} = K \frac{\partial T_s}{\partial n} \quad (7)$$

Les conditions initiales sont données par :

– dans le sous-domaine fluide :

$$\begin{aligned} u(r, z, 0) &= v(r, z, 0) = w(r, z, 0) \\ &= T_f(r, z, 0) = P(r, z, 0) = 0 \end{aligned}$$

– dans le sous-domaine solide :

$$T_s(r, z, 0) = (400 - 300)/300 = 0,33$$

au temps $t > 0$

Les conditions aux limites dynamiques sont données par :

– à l'entrée $z = 0$

$$\begin{aligned} 0 < r < r_e : w(r, 0, t) &= w_e(1 + \varepsilon_w \sin(\omega t)), u(r, 0, t) \\ &= v(r, 0, t) = 0 \end{aligned}$$

$$r_e < r < R : u(r, 0, t) = v(r, 0, t) = w(r, 0, t) = 0$$

– sur la paroi située en $r = R$

$$u(R, 0, t) = v(R, 0, t) = w(R, 0, t) = 0$$

– sur la partie conique de l'obstacle définie par

$$r = r_p = (z_p - z_{co}) \tan \Theta, z = z_p \text{ avec } r_p(z_p = z_{co}) = 0$$

où $z = z_{co}$, est la coordonnée axiale du sommet du solide correspondant au point de stagnation ;

– condition d'adhérence à la paroi (partie conique et partie cylindrique définie par $r_p(z = z_{cy}) = r_{cy}$) :

$$u(r_p, z_p, t) = w(r_p, z_p, t) = 0$$

$$\begin{aligned} v(r_p, z_p, t) &= v(r_p) = (r_p/r_{cy})v_0(1 + \varepsilon_v \sin(\omega t)), \text{ avec} \\ v(r_{cy}, z_{cy}, t) &= v_0 \end{aligned}$$

On note que la vitesse de rotation de l'obstacle a été prise sous forme sinusoïdale de même pulsation que la vitesse d'injection du fluide, pour éviter la présence au sein de l'écoulement de certains phénomènes dus à la modulation de la fréquence. Le choix de fréquences différentes à celle correspondant à la vitesse d'entrée ou du gradient de pression imposé nécessite une étude particulière.

– À la sortie $z = L$

$$\begin{aligned} r_p < r < R : \quad \frac{\partial u}{\partial z}(r, L, t) &= \frac{\partial v}{\partial z}(r, L, t) \\ &= \frac{\partial w}{\partial z}(r, L, t) = 0 \end{aligned}$$

Cette condition de nullité du gradient axial de la vitesse est utilisée par certains auteurs, surtout pour limiter le domaine de calcul dans les méthodes numériques. On signale toutefois qu'une autre condition aux limites relative à la conservation du débit a été utilisée dans des travaux antérieurs et que les résultats obtenus avec ces deux conditions n'indiquent pas un écart significatif. Ce type de conditions est utilisé également aussi pour la température par certains auteurs. D'autres optent pour les conditions ouvertes de type Orlanski.

– Sur l'axe, $r = 0$:

$$0 < z < z_p : u(0, z, t) = \frac{\partial v}{\partial r}(0, z, t) = \frac{\partial w}{\partial r}(0, z, t) = 0$$

Les conditions aux limites thermiques sont données par :

– À l'entrée, $z = 0$

$$0 < r < r_e : T_f(r, 0, t) = 0$$

– Sur la cavité, $r = R$

$$\frac{\partial T_f}{\partial r}(R, z, t) = 0$$

– Sur le solide, la condition thermique de l'égalité des flux à l'interface solide fluide est :

$$\frac{\partial T_f}{\partial n}(r_p, z_p, t) = K \frac{\partial T_s}{\partial n}(r_p, z_p, t)$$

– À la sortie $z = L$

$$0 < r < r_p : \quad \frac{\partial T_s}{\partial z}(r, L, t) = 0$$

$$r_p < r < R : \quad \frac{\partial T_f}{\partial z}(r, L, t) = 0$$

– Sur l'axe, $r = 0$

$$0 < z < z_p : \quad \frac{\partial T_f}{\partial r}(0, z, t) = 0$$

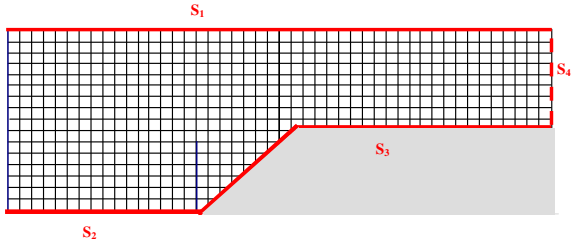
$$z_p < z < L : \quad \frac{\partial T_s}{\partial r}(0, z, t) = 0$$

3 Méthodes numériques

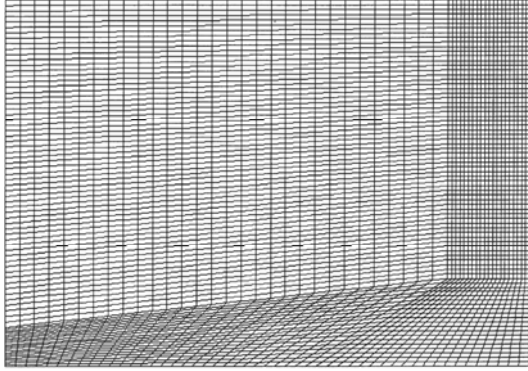
Deux méthodes numériques ont été utilisées : celle des différences-finies (Figs. 2a–c) et celle des éléments-finis (Fig. 3). La première est basée sur une discrétisation implicite des équations régissant l'écoulement et sur l'utilisation d'une procédure itérative permettant de résoudre le système algébrique non-linéaire qui en résulte. Du fait de la symétrie du problème, le calcul est effectué dans un plan de symétrie. Le domaine de calcul est divisé en deux sous-domaines adjacents (Fig. 2a) : un sous-domaine fluide et un sous-domaine solide. Le premier est limité par les parois de la cavité et de l'obstacle et l'axe de la conduite. Le sous-domaine solide est délimité par la paroi de l'obstacle et l'axe de la cavité.

La discrétisation des points de chacun des sous-domaines est indiquée sur la figure 2c. Les équations (1)–(4) sont discrétisées à l'aide d'un schéma de type Crank-Nicholson précis à l'ordre deux dans l'espace et dans le temps. Cette discrétisation utilise la méthode MAC (Marker And Cell) introduite par Harlow et Welsh [23] et indiquée sur la figure 2b.

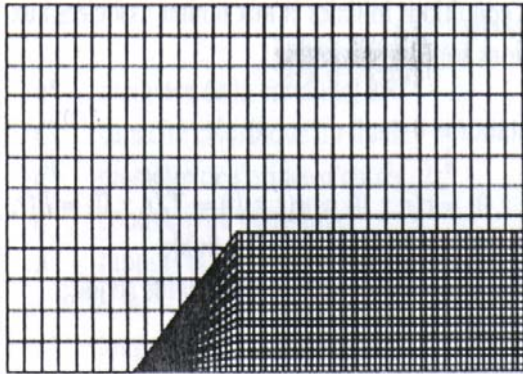
En ce qui concerne l'équation de conduction dans l'obstacle (6), la méthode ADI qui a été utilisée conduit



(a)



(b)



(c)

Fig. 2. (a) Sous-domaine fluide; S_1 : cylindre extérieur, S_2 : axe de symétrie, S_3 : paroi obstacle, S_4 : sortie La longueur de la conduite $L = 2$, le rayon $R_{cav} = 1,25$, orifice d'entrée de fluide de rayon $r_e = 0,125$, l'obstacle est composé de deux parties; un cône de demi-angle au sommet $\theta = 29,35^\circ$, de rayon $r_e = 0,28125$. La position du sommet du cône est fixée à $z_c = 1,1875$. La partie cylindrique a une longueur $l_{cyl} = 0,252$. (b) Domaine de calcul par éléments-finis. (c) Représentation qualitative du maillage dans les deux sous-domaines.

à un système linéaire de matrice tridiagonale résolu par l'algorithme de Thomas. L'équation de l'énergie relative au sous-domaine fluide (5) est discrétisée d'une manière analogue à celle des équations précédentes à l'exception des dérivées convectives qui sont approchées par des différences centrées du quatrième ordre. L'utilisation d'une telle approximation permet de minimiser l'erreur

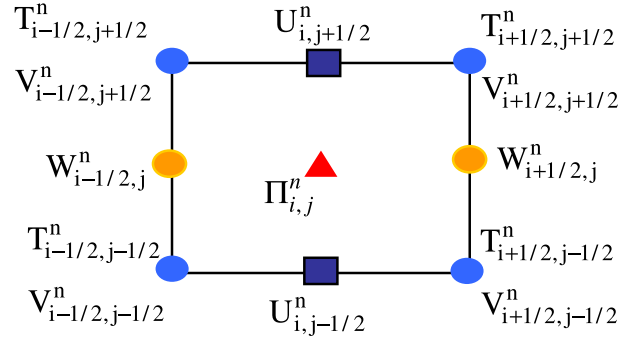


Fig. 3. Domaine de calcul par éléments-finis.

de troncature associée, devant les termes diffusifs. Toutefois, le schéma d'ordre quatre n'étant pas suffisamment dissipatif au voisinage immédiat de la paroi de l'obstacle, certaines oscillations créées par des termes dispersifs apparaissent; le gradient de température normal à la paroi de l'obstacle a donc été approché au premier ordre.

3.1 Schéma aux différences-finies pour le milieu fluide

3.1.1 Discrétisation de la méthode

Les équations du mouvement, de continuité et de l'énergie sont résolues au moyen d'un schéma implicite de type Crank-Nicholson à l'aide d'un processus itératif basé sur la perturbation de l'équation de continuité par l'introduction d'une compressibilité artificielle. Cette méthode a été proposée par Temam [24] pour la recherche des solutions stationnaires en faisant tendre le temps vers l'infini dans les équations instationnaires. Des méthodes semblables ont été utilisées par Fortin et al. [25], Peyret [26], Peyret [27].

Cette méthode présente l'avantage d'exprimer de façon explicite la dépendance de la pression avec le temps. En conséquence :

- Les conditions aux limites sur la pression ne sont pas nécessaires.
- La satisfaction de l'équation de continuité à chaque itération n'est pas nécessaire.
- L'introduction d'une dérivée temporelle de la pression rend possible la résolution des équations stationnaires de Navier-Stokes par une méthode instationnaire.

3.1.2 Équations discrétisées

Le sous-domaine fluide est divisé en mailles carrées de coté $\Delta r = \Delta z = h$, sauf au voisinage de la paroi de l'obstacle où le maillage n'est plus régulier (Fig. 2a). Ainsi, on peut distinguer deux zones où le maillage est régulier : l'une à la partie amont de l'obstacle, l'autre dans la partie annulaire de l'écoulement, et une troisième zone, de maillage irrégulier, proche de la paroi oblique de l'obstacle. Du fait du déplacement continu de l'obstacle, la configuration géométrique du domaine d'étude change au

cours du temps, ce qui nécessite l'utilisation de la méthode du maillage variable au cours du temps. Le domaine de calcul est divisé en deux sous-domaines : un sous-domaine fluide et un sous-domaine solide. En ce qui concerne le sous-domaine fluide. En dehors de la paroi de l'obstacle, les frontières du domaine physique sont confondues avec les lignes du maillage. On notera que la partie cylindrique de la paroi de l'obstacle est située à mi-distance entre deux lignes du maillage et qu'au voisinage de sa partie conique, les mailles sont irrégulières. Le schéma de maille retenu est détaillé dans les références [28–32]. Le reste du domaine est divisé en mailles carrées. Quant au sous-domaine solide, son découpage est régulier en r et z dans sa partie cylindrique mais irrégulier suivant ces deux directions dans la partie conique. Les limites de ce sous-domaine coïncident avec les lignes du maillage.

La méthode de résolution numérique basée sur une discrétisation implicite des équations régissant l'écoulement et par l'application d'une procédure itérative permettant de résoudre le système algébrique non-linéaire qui en résulte. La conduction à l'intérieur du solide a été déterminée par la méthode ADI. Les équations régissant le mouvement et l'énergie ont été résolues également avec la méthode des éléments-finis. Dans ce cas un seul domaine est considéré (Fig. 3), il contient deux entités, une relative à la partie fluide et l'autre à la partie solide. Neuf (09) régions ont été définies couvrant la totalité du domaine y compris les frontières. Ce domaine contient 3410 mailles quadrilatères non uniformes.

Hypothèse sur la vitesse de rotation

Pour éviter la création des instabilités dues à la vitesse de rotation nous avons opté pour une variation linéaire évolutive de cette dernière depuis la valeur initiale, nulle, à la valeur imposée. Des tests préliminaires effectués, ont conduit au choix d'une variation linéaire au cours des premiers vingt plans en temps atteignant la valeur limite v_0 .

On note aussi que les termes du carré de la composante azimutale de la vitesse sont pris de la forme du produit des vitesses dans deux plans en temps, le plan n et le plan $n + 1$. Cette forme s'est avérée, après des tests numériques, plus adaptée pour la rapidité de la convergence que de considérer la vitesse dans le même plan en temps.

3.1.3 Système itératif

La solution du système algébrique non-linéaire précédant est obtenue par la résolution du système itératif suivant :

$$\begin{cases} u_h^{\nu+1} - u_h^\nu + HL_u(u_h^\nu, v_h^\nu, w_h^\nu, \Pi_h^\nu) = 0 \\ v_h^{\nu+1} - v_h^\nu + HL_v(u_h^{\nu+1}, v_h^\nu, w_h^\nu) = 0 \\ w_h^{\nu+1} - w_h^\nu + HL_w(u_h^{\nu+1}, w_h^\nu, \Pi_h^\nu) = 0 \\ \Pi_h^{\nu+1} - \Pi_h^\nu + MD(u_h^{\nu+1}, w_h^{\nu+1}) = 0 \\ T_h^{\nu+1} - T_h^\nu + HLT(u_h^{\nu+1}, w_h^{\nu+1}, T_h^\nu) = 0 \end{cases}$$

où ν est l'indice d'itération, H et M sont les paramètres assurant la convergence du processus itératif ; leur valeur, qui dépend du cas traité, est déterminée par des tests numériques.

La convergence du système itératif est imposée pour :

$$\max\{|Lu|, |Lv|, |Lw|, |D|, |LT|\} < \varepsilon$$

La valeur de ε est choisie lorsque l'équation de continuité est satisfaite à 10^{-3} près.

3.1.4 Conditions de convergence

Les conditions nécessaires pour obtenir la convergence du système itératif précédent sont obtenues par l'étude de la stabilité du schéma. Pour le cas $\Delta r = \Delta z$, en négligeant les termes convectifs on obtient les conditions suivantes :

$$M = \frac{\Delta r^2}{2H} - \left(\frac{1}{Re} + \frac{\Delta r^2}{4\Delta t} \right), H > 0, M > 0$$

Pour que M soit positif il faut qu'il satisfasse la condition suivante :

$$\frac{\Delta r^2}{H} > \left(\frac{2}{Re} + \frac{\Delta r^2}{2\Delta t} \right)$$

Il convient de prendre les valeurs de H de l'ordre de Δr^2 .

On note que ces conditions représentent des cas simplifiés de l'étude de la stabilité du schéma itératif. Elles sont jugées satisfaisantes dans beaucoup de problèmes similaires, en particulier dans le cas de l'étude de Peyret [26] relative à l'évolution d'un jet horizontal dans un fluide stratifié.

3.1.5 Schéma ADI pour le milieu solide

Description de la méthode

Les difficultés rencontrées pour la résolution de l'équation de la chaleur par les algorithmes classiques ont conduit à recourir à l'utilisation des méthodes implicites aux directions alternées (ADI). Ces méthodes ont été développées par Peaceman (1955), Rachford et Douglas (1955) en particulier. Ces méthodes consistent à résoudre un système algébrique tridiagonal dans une direction à chaque étape. L'une des méthodes la plus usuelle est celle à deux étapes ; elle consiste à résoudre un système algébrique tridiagonal dans une direction à chaque étape. Durant la première étape une matrice tridiagonale est résolue pour chaque valeur de j (ordonnée) du domaine. Durant la deuxième étape, une matrice tridiagonale est résolue pour chaque valeur de i (abscisse) du domaine. Cette méthode est précise à l'ordre deux dans l'espace et dans le temps, elle est stable sans condition.

3.1.6 Choix du maillage

L'équation de la conduction à l'intérieur du corps solide est discrétisée suivant un maillage adapté à sa forme cylindro-conique (Fig. 3) (voir annexe).

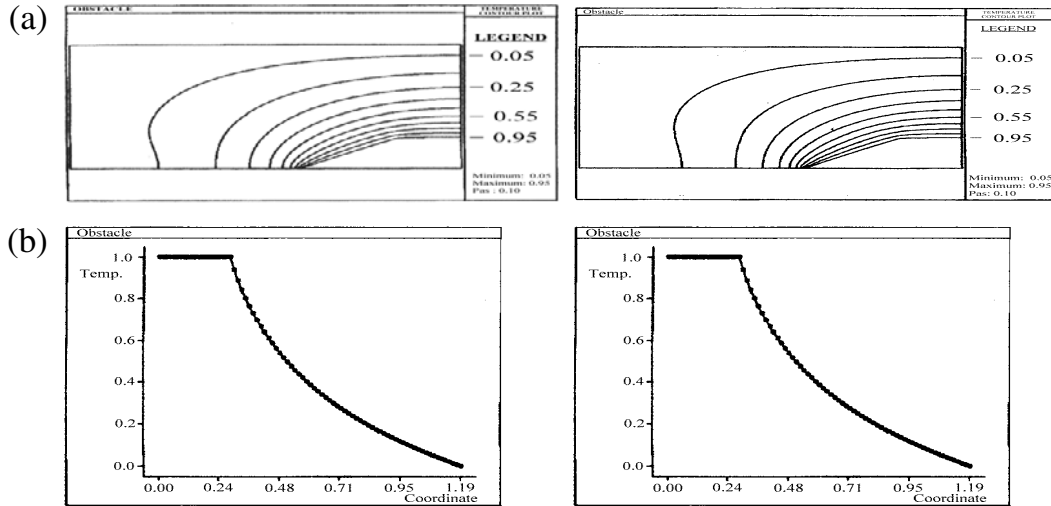


Fig. 4. Lignes isothermes. (a) Profil radial de la température correspondant à la partie cylindrique ($z = 1,6875$), (b) pour deux instants différents (de gauche à droite : $t = t_1 = T/4$; $t = t_4 = T$, $Re = 50$) (par éléments-finis).

4 Résultats et discussions

4.1 Caractéristiques de l'étude

Les résultats numériques ont été obtenus pour les paramètres géométriques, numériques et physiques suivants :

(a) Paramètres géométriques

Ils sont relatifs aux différentes dimensions du domaine considéré. La conduite a une longueur $L = 2$, un rayon $R_{cav} = 1,25$ et un orifice d'entrée de fluide de rayon $r_e = 0,125$, l'obstacle est composé de deux parties ; un cône de demi-angle au sommet $\theta = 29,35^\circ$, de rayon $r_e = 0,28125$. La position du sommet du cône est fixée à $z_c = 1,1875$. La partie cylindrique a une longueur $l_{cyl} = 0,252$.

(b) Paramètres numériques

Ils sont relatifs aux choix des différents paramètres considérés dans le calcul. Le problème de l'écoulement extérieur a été résolu avec un pas spatial constant $h = 1/16$ et celui de la conduction à l'intérieur du solide avec un pas spatial variable. Le pas en temps $\Delta t = 1/64$ est le même pour la résolution de l'écoulement extérieur et la conduction.

La valeur de la constante ε , assurant la convergence du système itératif a été fixée égale à 4×10^{-3} . Les constantes H et M de ce dernier système dépendent des constantes physiques choisies à savoir : le nombre de Reynolds, la vitesse de translation et celle de rotation de l'obstacle.

(c) Paramètres physiques

Ils sont relatifs aux choix des différents paramètres physiques du problème. Le nombre de Reynolds varie de 50 à 250, le nombre de Prandtl $Pr = 0,7$ et le rapport des conductivités K est tel que : $10^{-2} \leq K \leq 10^3$. Les températures initiales du fluide et du solide sont $T_f = 300$ K et $T_s = 400$ K, respectivement. Généralement les solides possèdent une

conductivité thermique de l'ordre de 10^2 W.m⁻¹.K⁻¹ pour les métaux et de l'ordre 10 W.m⁻¹.K⁻¹ pour les alliages et celle des gaz est de l'ordre de 10^{-2} W.m⁻¹.K⁻¹, ceci justifie le choix du maximum du rapport des conductivités est de l'ordre 10^3 . En ce qui concerne le minimum de ce rapport, qui est de l'ordre de 10^{-2} , il correspond au cas des milieux poreux qui dans certaines situations de porosité (coefficient de porosité tend vers l'unité) qui sont assimilés à des milieux non poreux.

Le temps nécessaire pour l'établissement de la vitesse de rotation de l'obstacle est choisi égal à $20\Delta t$.

4.1.1 Étude du régime transitoire

Cette étude a porté essentiellement sur le cas de faibles débits ($Re < 100$) et des nombres de Taylor < 500 , pour éviter l'apparition de grandes zones de recirculation au voisinage de la paroi du solide, en particulier dans sa partie conique. Pour la position choisie du solide, la valeur maximale du nombre de Reynolds atteinte est $Re = 80$. L'établissement du régime de l'écoulement a été étudié pour le cas de $Re = 50$ (Fig. 4), ce qui ne présente que de faibles perturbations dynamique et thermique au sein de l'écoulement.

La constante de temps est habituellement définie comme le temps nécessaire pour que le régime transitoire soit à 60 % du régime établi correspondant, ceci sur l'ensemble des grandeurs caractéristiques définissant l'état de l'écoulement. Dans cette étude l'examen a été fait sur le profil de la vitesse à la sortie de l'espace annulaire de la conduite. Pour le cas de $Re = 50$ la constante de temps est évaluée à $520 \Delta t$ ($\Delta t = 1/64$). C'est cette valeur qui a été prise égale à la période du mouvement pour des nombres de Reynolds ≤ 100 . Pour des raisons de commodité les résultats relatifs aux champs dynamique et thermique sont représentés à des instants correspondants à

des multiples du quart ($1/4$) d'une période, par contre en ce qui concerne la variation des différents paramètres, elle est faite en fonction du temps durant toute la période.

4.1.2 Débit périodique

La périodicité de la variation de débit est assurée par une vitesse d'entrée de type sinusoïdale : $w_e = w_{e0}(1 + \varepsilon_w \sin \omega t)$

Ici, w_{e0} est la valeur moyenne de la vitesse, ε_w l'amplitude de la vitesse d'entrée ($0 \leq \varepsilon_w \leq 1$) et ω est la pulsation. La fréquence de référence a été prise égale à $1/\tau$ où τ est la constante de temps du régime non périodique. Les résultats obtenus pour des nombres de Reynolds variant de 0 à 85, un nombre de Prandtl ($Pr = 0,7$), pour des nombres de Taylor variant de 0 à 500 et par les deux méthodes de calcul, ont été étudiés et comparés entre eux. Néanmoins on signale que pour des raisons de commodité, que la majorité des courbes présentées sont celles obtenues par la méthode des différences-finies et que celles obtenues par la méthode des éléments-finis sont présentées dans certains cas qui sont indiqués dans les figures correspondantes. On signale que l'établissement du régime périodique se fait après un temps qui dépend en général des différents paramètres de l'étude. Cependant, pour des raisons d'homogénéité de la représentation des résultats, on a choisi ce temps égal au quart d'une période.

L'aspect oscillatoire du profil radial des trois composantes de la vitesse dans l'espace annulaire calculé pour une côte $z = 1,6875$ et $Re = 80$, est bien apparent (Figs. 5a–c). L'évolution de la composante axiale de la vitesse sur l'axe, au voisinage de la zone d'entrée est représentée dans la figure 6a. On remarque que la périodicité de cette composante de la vitesse est identique à celle de l'écoulement d'entrée et qu'elles sont en phase. L'observation du profil radial de la composante axiale de la vitesse fait ressortir un renversement de la vitesse au voisinage de la paroi extérieure pour des temps supérieurs à la moitié d'une période. L'augmentation de l'amplitude ε_w se fait sentir surtout sur la composante axiale de la vitesse (Fig. 6b).

L'influence de l'amplitude sur le champ thermique n'apparaît que sur la zone convective, zone située loin du solide. En effet cette dernière s'étend à mesure que la perturbation de l'amplitude ε_w croît. Pour une amplitude donnée ($\varepsilon_w = 0,6$). On constate que la zone convective ne s'étend pas d'une manière continue au cours du temps, mais il apparaît une certaine périodicité dans l'échange thermique entre le solide chauffé et le fluide (Fig. 7), ce qui est tout à fait conforme à la loi périodique choisie.

La définition d'un nombre de Nusselt en écoulement oscillant est délicate puisque les études expérimentales et analytiques ont montré que dans un écoulement de fluide en présence de parois chauffées, la grandeur $(T_m - T_p)$, où T_m est une température moyenne du fluide et T_p et la température de la paroi à l'interface fluide-paroi que les corrélations relatives aux coefficients de transfert de chaleur, établies pour des écoulements permanents ne sont pas par conséquent applicables au cas de l'écoulement

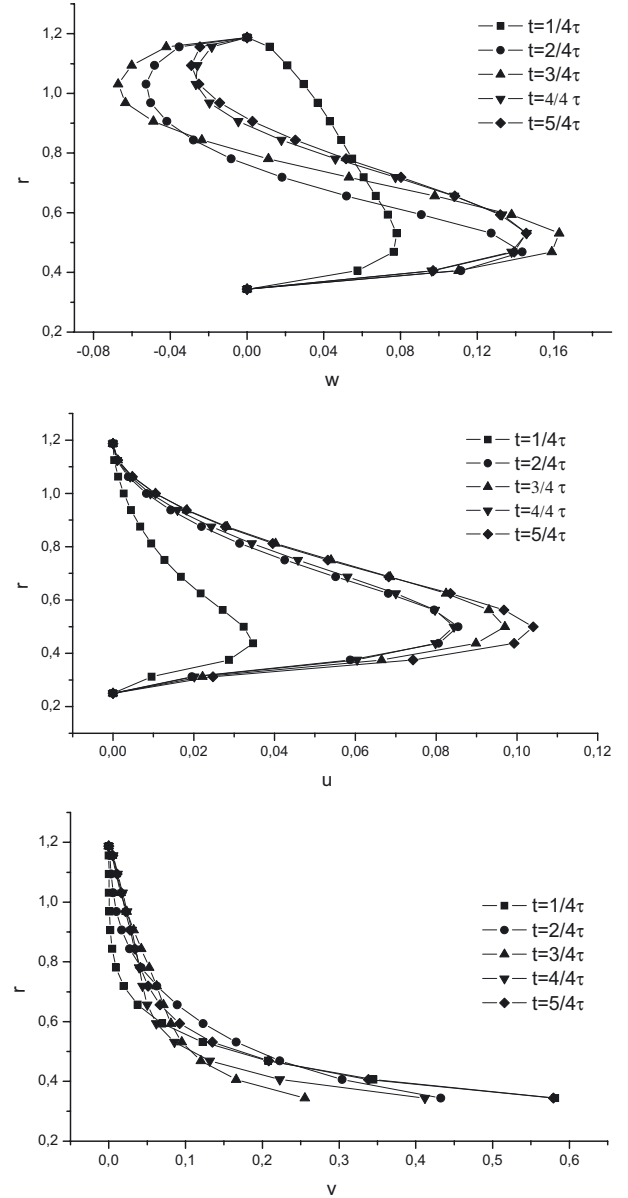


Fig. 5. (a) Variation du profil radial ($z = 1,6875$) de la composante axiale de la vitesse au cours du temps et pour $Re = 80$. (b) Variation du profil radial ($z = 1,6875$) de la composante radiale de la vitesse au cours du temps et pour $Re = 80$. (c) Variation du profil radial ($z = 1,6875$) de la composante azimutale de la vitesse au cours du temps pour $e_v = 0,4$ et pour $Re = 80$.

pulsé. En effet, l'utilisation de la loi classique de Newton $Q = hs\Delta T$ conduirait à un coefficient h pouvant devenir infini ou négatif durant certaines parties du cycle. Dans cette étude nous avons opté pour le choix d'une expression du nombre de Nusselt basée sur des valeurs moyennes des grandeurs de la température et l'épaisseur de l'espace annulaire ($R_2 - R_1$), où R_2 et R_1 représente respectivement les rayons du cylindre extérieur et le cylindre intérieur dans cette expression qui est donnée par :

$$Nu = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) r_p / (T_m - T_p) / (R_2 - R_1) \right]$$

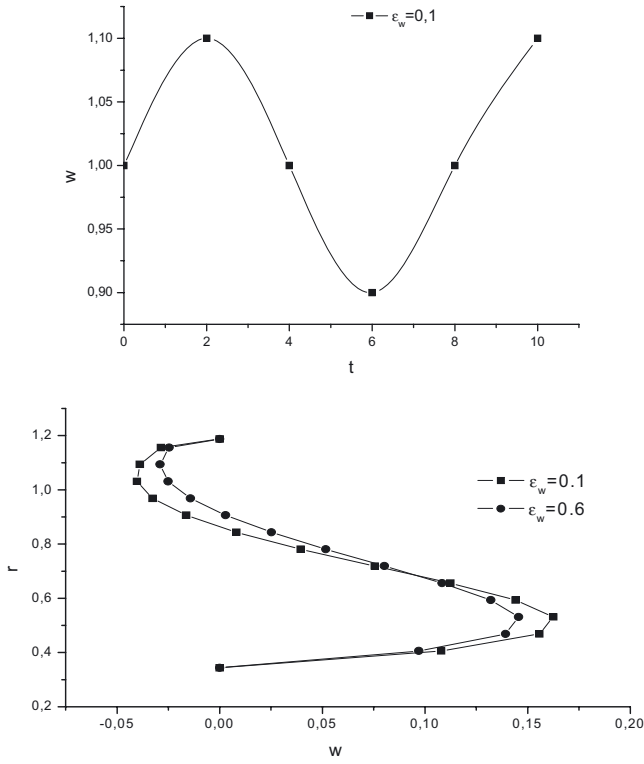


Fig. 6. (a) Variation de la composante axiale de la vitesse au cours du temps pour $Re = 80$. (b) Variation du profil radial ($z = 1,6875$) de la composante axiale de la vitesse pour différentes amplitudes de la vitesse axiale et pour $Re = 80$.

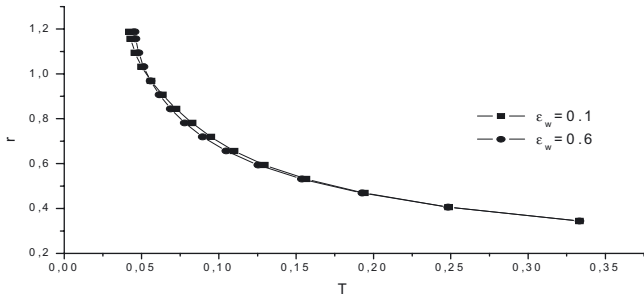


Fig. 7. Variation de la température en fonction de la coordonnée r pour différentes amplitudes de la vitesse axiale et pour $Re = 80$.

La variation du nombre de Nusselt local en fonction de la coordonnée z pour différents instants est représentée sur la figure 8. On constate que le nombre de Nusselt local diminue en fonction de z et présente un aspect oscillatoire au cours du temps. Concernant l'influence de l'amplitude, on constate une croissance rapide du nombre de Nusselt global pour des amplitudes inférieures à 0,6 et au delà de cette valeur, il tend asymptotiquement vers une limite atteinte (Fig. 9). Pour les faibles amplitudes la valeur obtenue est voisine de 2,70, correspondant au cas d'une amplitude nulle. Ces résultats sont comparables à ceux trouvés par Zhao et Cheng [16].

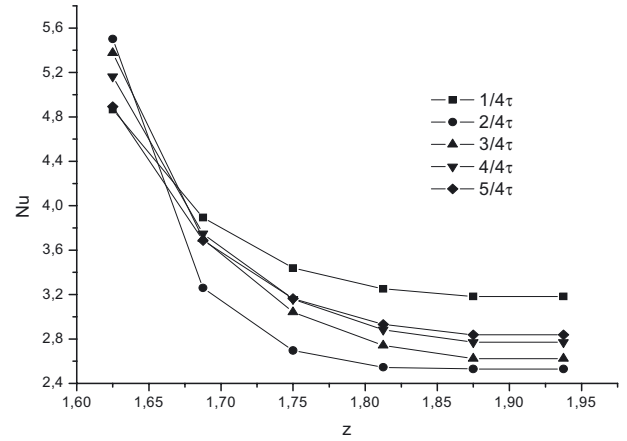


Fig. 8. Variation du nombre de Nusselt en fonction de la coordonnée z pour différents instants.

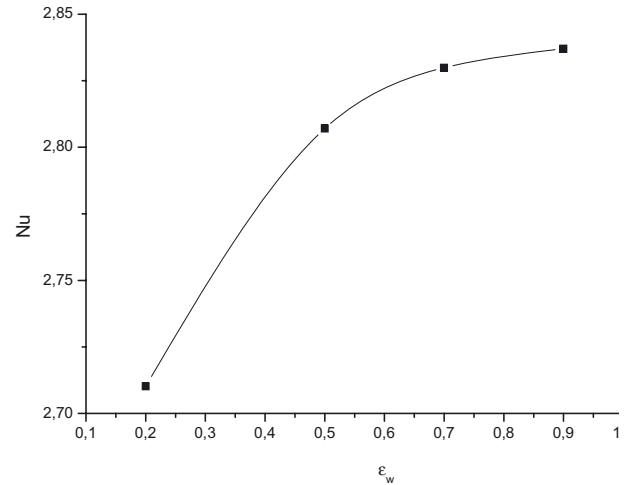


Fig. 9. Variation du nombre de Nusselt en fonction des amplitudes de la vitesse axiale.

4.2 Influence de la fréquence

4.2.1 Sur le champ dynamique

Le profil radial de la composante axiale de la vitesse w (Fig. 10) tend vers un profil aplati, il s'écarte du profil du Poiseuille, caractéristique des écoulements pulsés s'effectuant à des fréquences élevées. On constate que la composante radiale u de la vitesse (Fig. 11) diminue au fur et à mesure que la fréquence augmente, elle devient pratiquement nulle pour des valeurs égales à 10 fois la fréquence de référence, l'écoulement devient alors unidirectionnel. Ce résultat peut être retenu comme un moyen pour la détermination de la fréquence de référence.

4.2.2 Sur le champ thermique

Les isothermes (Fig. 12) montrent que l'augmentation de la fréquence défavorise l'échange thermique par convection ; c'est ainsi que les courbes se confinent au voisinage

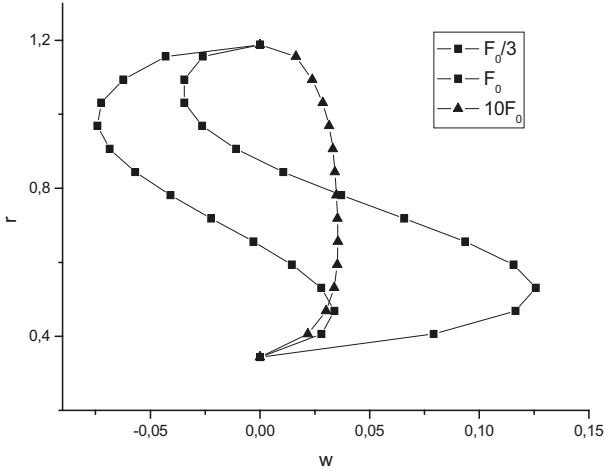


Fig. 10. Variation du profil radial ($z = 1,6875$) de la composante axiale de la vitesse en fonction de la fréquence.

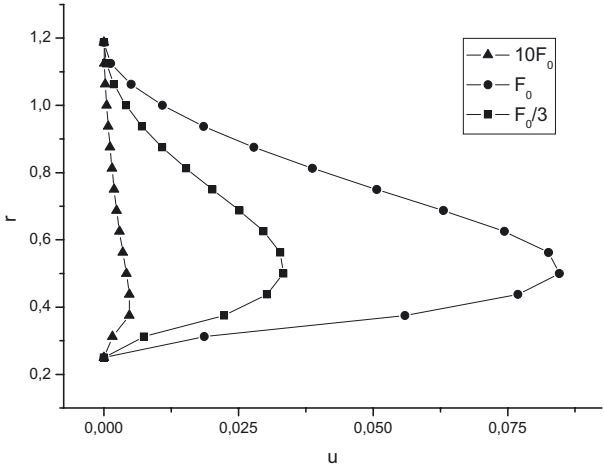


Fig. 11. Variation du profil radial ($z = 1,6875$) de la composante radiale de la vitesse en fonction de la fréquence.

de la paroi du solide pour des fréquences élevées, ce qui caractérise la conduction. La variation du nombre de Nusselt local en fonction de la coordonnée z (Fig. 13) montre que ce dernier augmente en fonction de la fréquence.

Le nombre de Nusselt global est proportionnel à $f^{1/3}$ (Fig. 14), résultat trouvé par d'autres auteurs comme Huebner [4], Apelt [12] et Zhao et Chang [16].

On constate que l'intersection de la courbe avec l'axe vertical (Fig. 14) correspond à la valeur 2,45, relative au cas du régime permanent et à $T_s = \text{constante}$.

4.3 Influence de la vitesse de rotation

4.3.1 Cas du régime non périodique

On s'intéresse au cas d'une combinaison d'une vitesse d'entrée uniforme et une vitesse de rotation variable. Un domaine de variation acceptable de la vitesse de rotation a pu ainsi être délimité dans des travaux antérieurs [28–30]. Au-delà l'intensité des instabilités dynamiques devient

telle que le calcul diverge. On sait que cela correspond à une translation vers le régime turbulent. La comparaison des différents résultats montre que les tourbillons de Taylor commencent à apparaître, dans l'écoulement laminaire, à partir d'un nombre de Taylor critique Ta_c de l'ordre de 10^4 . Lorsque la vitesse de rotation augmente le régime laminaire évolue vers la turbulence, la translation se fera pour un deuxième nombre de Taylor critique Ta'_c de l'ordre de 10^5 . Les résultats trouvés dans la présente étude se rapprochent, en particulier de ceux trouvés dans le cas d'un espace annulaire large et d'une longueur assez grande.

L'influence du champ dynamique sur le champ thermique est examinée dans deux cas : celui du non couplage de l'écoulement avec la conduction à l'intérieur de l'obstacle et celui du couplage à travers la condition d'interface. L'étude de l'échange thermique est limitée à l'apparition des instabilités thermiques. Dans le cas du couplage convection-conduction le rapport des conductivités thermiques $K = k_s/k_f$ joue un rôle très important dans le mécanisme du transfert thermique. Les tests ont porté sur des valeurs comprises entre 10^{-2} et 10^{+3} . Les conditions aux limites classiques, température de paroi constante et flux pariétal constant sont comparées aux cas limites des valeurs de K . L'étude a été menée avec un nombre de Reynolds variant de 30 à 85 et un nombre de Taylor défini par : $Ta = V_0(R_2 - R_1)/\nu$, variant de 0 à 500.

Dans cette partie les résultats ont été obtenus uniquement par la méthode de différences-finies. L'étude du comportement dynamique de l'écoulement, en dehors de tout transfert de chaleur, pour différentes vitesses de rotation de l'obstacle montre l'apparition des instabilités dynamiques pour des vitesses de rotation de l'obstacle, qui varient en fonction du nombre de Reynolds. Les résultats montrent que cette évolution ne se fait pas d'une manière monotone, ce qui rejoint les résultats d'autres auteurs.

L'influence de la vitesse de rotation est perceptible, principalement, dans la partie annulaire où elle a pour effet d'éloigner de la paroi les tourbillons. Au-delà du nombre de Reynolds (Fig. 15) supérieure à 30, le nombre de Taylor critique augmente en fonction du nombre de Reynolds. On note que pour les faibles valeurs de ce dernier que le nombre de Taylor critique reste constant. La présence de points d'inflexion dans le profil des composantes de la vitesse caractérise l'existence des zones tourbillonnaires et qui est aussi à l'origine des instabilités thermiques, comme l'ont signalé plusieurs auteurs. On remarque que ces points d'inflexion sont d'autant plus apparents que la vitesse de rotation de l'obstacle est grande. Le transfert de chaleur entre l'obstacle et le fluide est favorisé par l'augmentation de la vitesse de rotation, la zone d'écoulement, concernée, de façon notable par le transfert de chaleur, est d'autant plus étendue que la vitesse de rotation est grande. On note aussi, la déformation accrue des lignes isothermes en fonction de la vitesse de rotation, cela correspond aux faits que dans une section droite, la température de l'écoulement n'est pas une fonction monotone décroissante de l'abscisse radiale, et qu'en

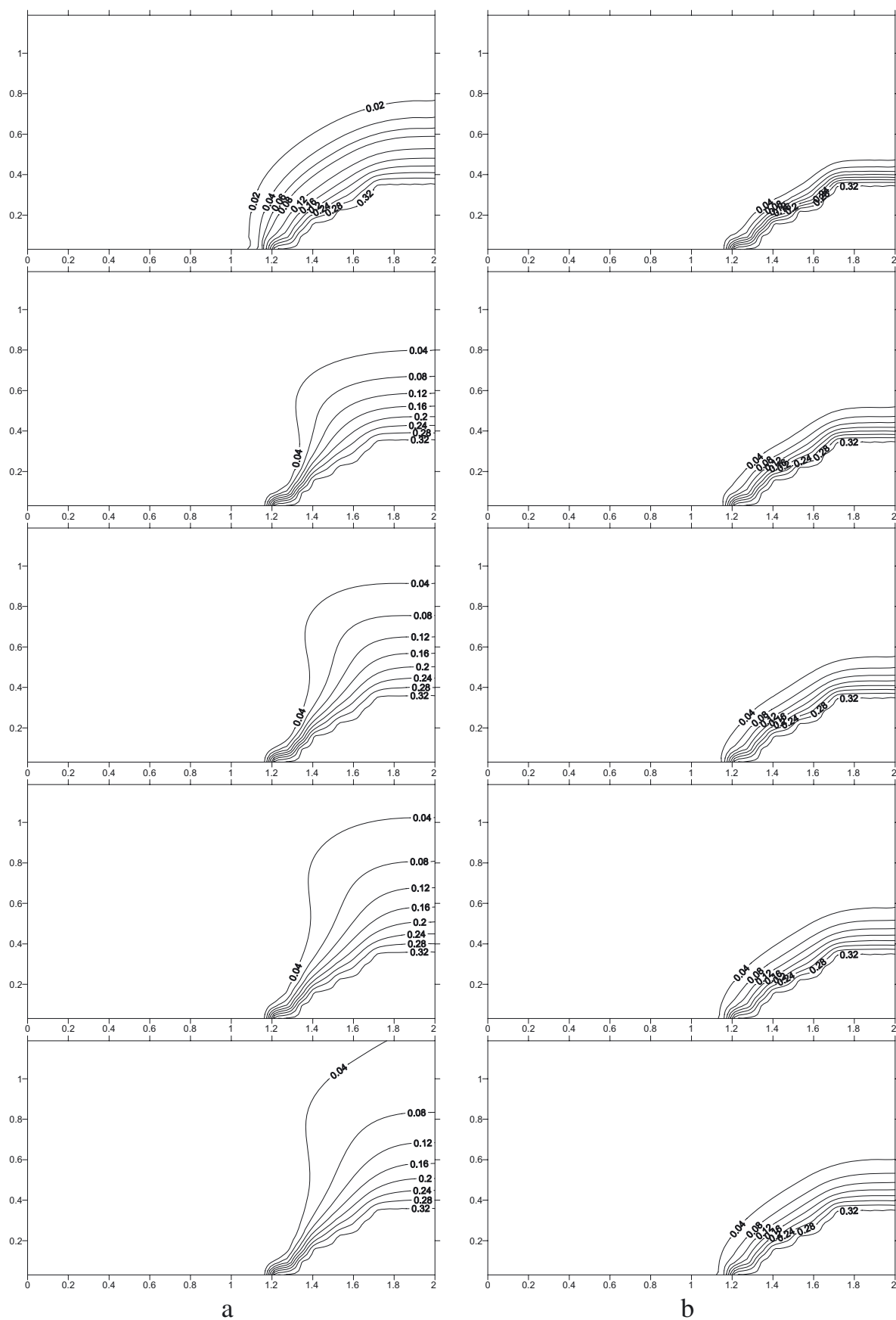


Fig. 12. Lignes isothermes pour : (a) $f = f_0$, (b) $f = 10f_0$.

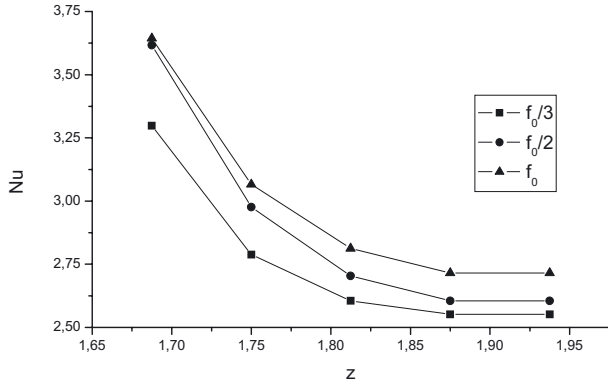


Fig. 13. Variation du nombre de Nusselt en fonction de la coordonnée z pour différentes fréquences.

particulier dans la zone tourbillonnaire de l'espace annulaire, le gradient de température peut changer de signe. Il est bien connu que ce changement de signe du gradient de température coïncide avec le développement d'instabilités thermiques qui, dans notre cas, s'amplifient avec la vitesse de rotation. Cette influence de la vitesse de rotation sur le profil radial de température est en accord avec les résultats expérimentaux d'autres travaux. La présence de zones dans l'espace annulaire où le gradient radial de la température est positif, est à l'origine des instabilités thermiques qui se produisent dans l'écoulement. Ces zones sont caractérisées par des valeurs négatives de la composante radiale de la vitesse ; la vitesse est alors dirigée vers la paroi chaude et les particules appartenant au fluide qui descendent, se chauffent de nouveau. Cette chaleur ainsi acquise sera évacuée ultérieurement dans l'écoulement lors du mouvement tourbillonnaire. C'est cette quantité de chaleur qui est à l'origine de l'augmentation de température dans l'écoulement et le développement par la suite d'instabilités thermiques dans l'espace annulaire. D'autres études ont abouti à la même constatation. Les résultats indiquent que les remarques précédentes sont d'autant plus vraies que la vitesse de l'obstacle est faible. On confirme que l'approche asymptotique de la solution avec couplage [7, 8] vers les cas classiques de température constant à la paroi ou de flux constant à la paroi se vérifie d'autant mieux que la vitesse de rotation est faible (Fig. 16a). Le cas le plus proche évidemment est l'absence du mouvement de l'obstacle (Fig. 16b). La variation de la température à l'intérieur du solide (Fig. 16c) en fonction de la coordonnée radiale se manifeste pour les faibles valeurs de K , alors qu'elle reste constante pour les grands K . La température moyenne du fluide (Fig. 16d) augmente le long de la paroi du solide pour atteindre une température d'équilibre d'autant plus grande que le rapport de conductivité est grand. Le flux de chaleur du solide Q_s décroît linéairement le long de la paroi du solide, cette décroissance est d'autant plus grande que le rapport de conductivité est petit. Pour une vitesse de rotation donnée, le flux de chaleur dans le fluide, Q_f , décroît linéairement le long de la paroi du solide. Pour les faibles nombres de Reynolds, le flux de chaleur est peu sensible

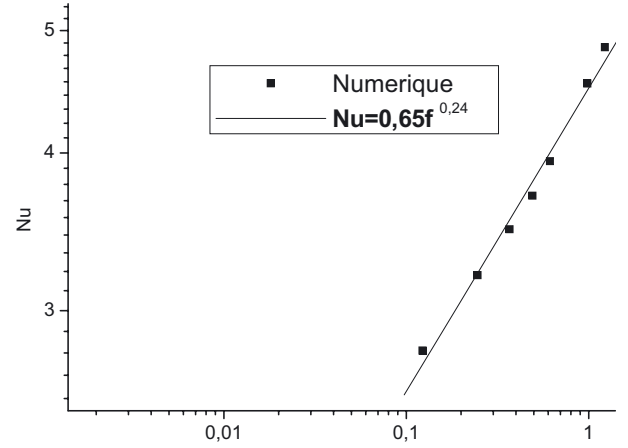


Fig. 14. Variation du nombre de Nusselt en fonction de la fréquence.

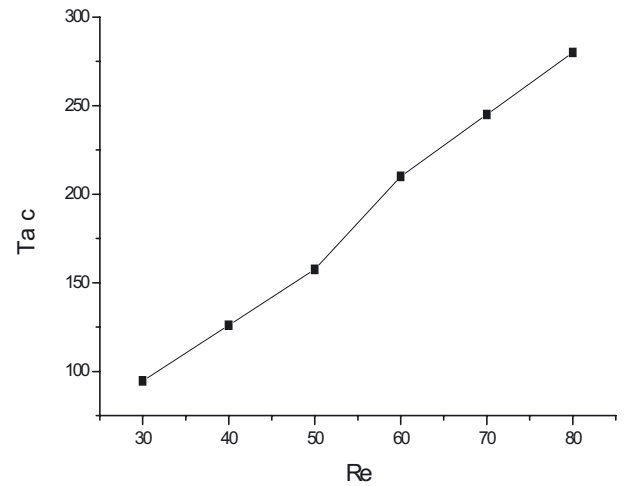


Fig. 15. Variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Reynolds.

aux variations de la vitesse de rotation (Fig. 17a). Par contre il est inversement proportionnel à la vitesse de rotation pour les grandes valeurs de nombre de Reynolds (Fig. 17b). Le nombre de Nusselt global augmente lorsque le nombre de Reynolds croît (Fig. 18). Mais pour un nombre de Reynolds fixé, Nu varie légèrement en fonction de la vitesse de rotation du solide.

L'étude de l'influence du rapport des conductivités thermiques a été menée dans la plage de variation de $10^{-2} \leq K \leq 10^{+3}$ en considérant des conductivités des solides différents. Les faibles valeurs de la conductivité correspondent aux alliages et certains milieux poreux. La conduction cesse de se manifester au-delà de $K = 1$. Lorsque K diminue de cette valeur, la conduction à l'intérieur de l'obstacle se manifeste davantage, la partie touchée par le refroidissement est d'autant plus grande que K est faible. En l'absence de l'effet convectif de rotation, la zone concernée par l'échange thermique dans l'écoulement est plus petite que celle où le rapport des conductivités diminue. L'échange thermique entre le solide et le fluide se fait essentiellement par conduction au

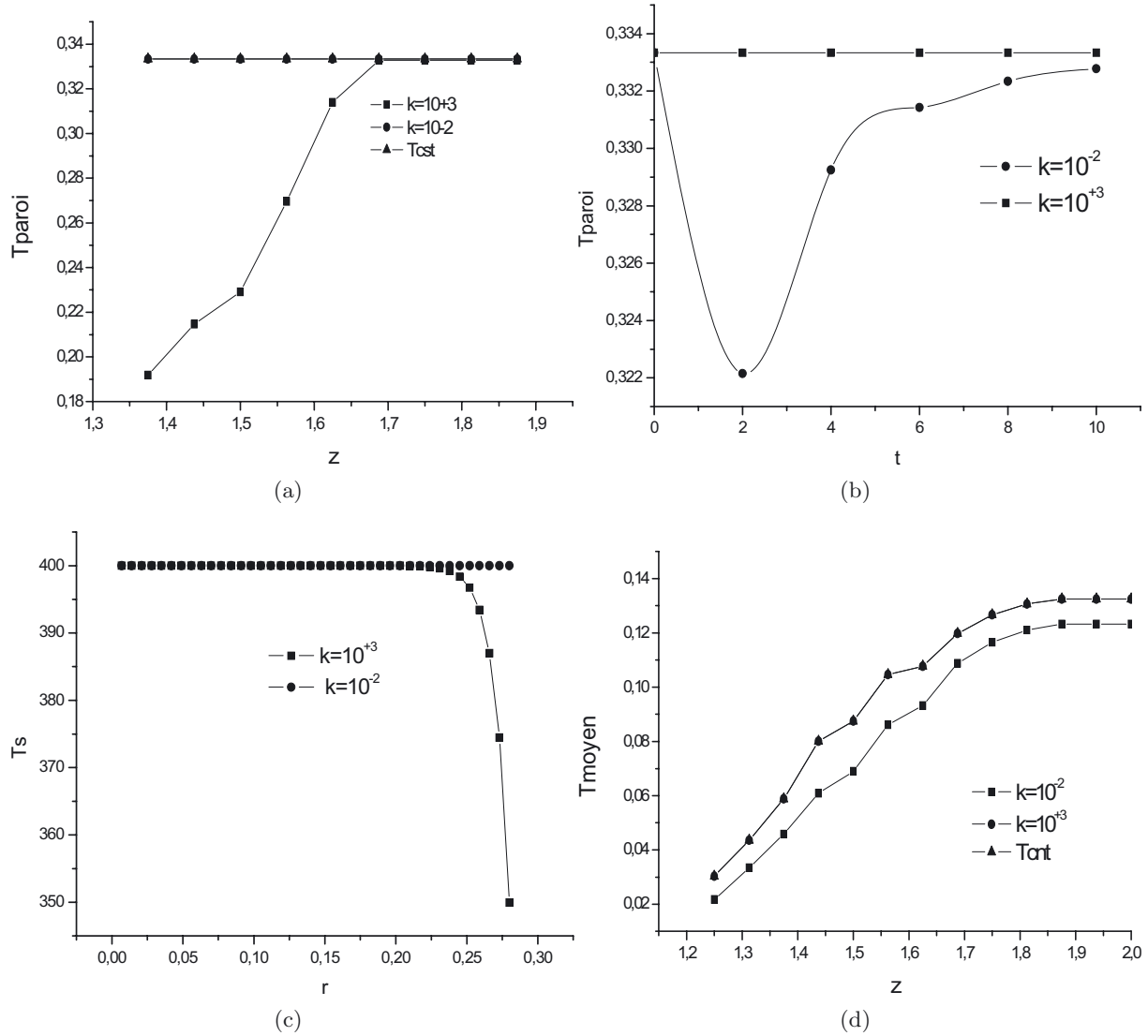
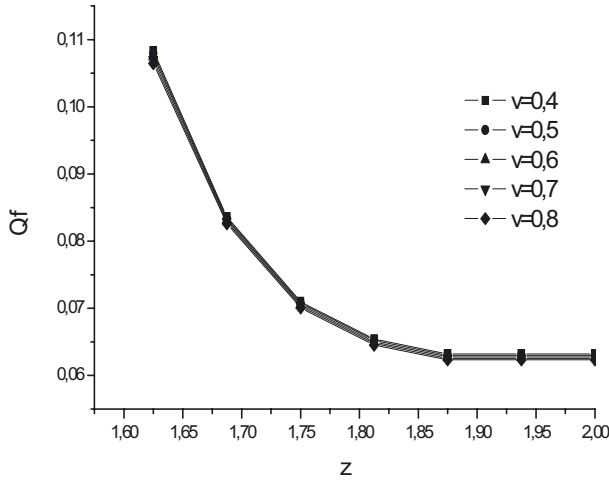


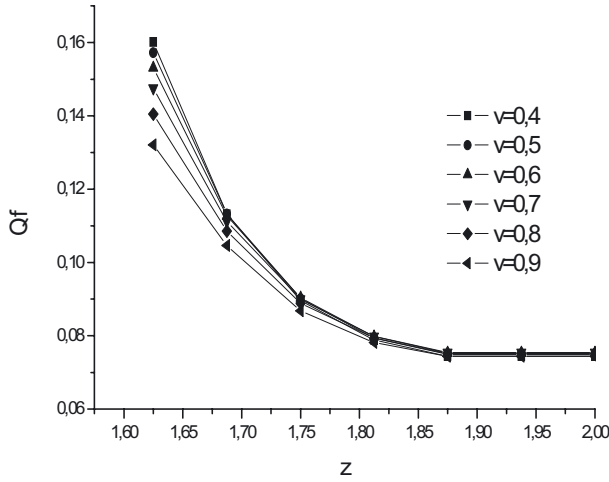
Fig. 16. (a) Variation de la température de paroi en fonction de z pour différents cas de la conductivité. (b) Variation de la température de paroi en fonction du temps pour différents cas de la conductivité sans rotation. (c) Variation de la température du solide en fonction de r pour différents cas de la conductivité. (d) Variation de la température moyenne en fonction de z pour différents cas de la conductivité et pour $Re = 80$.

voisinage de l'interface (Fig. 16c). Lorsque K augmente, l'effet de la conduction dans le solide a tendance à diminuer fortement pour disparaître complètement à partir des valeurs de $K \geq 10^3$. Par ailleurs la convection forcée se manifeste d'avantage pour les grandes valeurs de K (Fig. 16c). Le champ thermique dans l'écoulement est caractérisé par le réchauffement des couches fluide se trouvant au contact de la paroi chaude de l'obstacle, elles atteignent la température de cette dernière d'autant plus vite que K est grand. Ces couches semblent jouer le rôle d'une paroi isolante pour le solide qui conserve ainsi sa température. Au-delà de cette couche, l'échange thermique dans l'écoulement se fait par convection forcée, ceci concerne une région d'autant plus étendue que K est grand. Néanmoins il faut constater qu'à partir des valeurs de $K \geq 10$, l'échange thermique dépend de

moins en moins de ce paramètre. À l'intérieur du solide, la température diminue légèrement dans la partie en contact avec l'écoulement dans les premiers instants, pour des valeurs de $K \leq 10$. Par la suite on constate une autre augmentation de la température vers sa valeur initiale. À partir de $K = 10$, la température à l'intérieur du solide ne subit pratiquement plus de variation. L'influence de la vitesse de rotation est perceptible, principalement, dans la partie annulaire. Le nombre de Taylor critique augmente linéairement en fonction du nombre de Reynolds lorsque celui-ci est supérieur à 30. La présence de points d'inflexion dans le profil des composantes de la vitesse caractérise l'existence des zones tourbillonnaires qui donnent naissance à des instabilités thermiques. Le transfert de chaleur entre l'obstacle et le fluide est favorisé par l'augmentation de la vitesse de rotation. Dans



(a)



(b)

Fig. 17. (a) Variation de flux en fonction z pour différentes valeurs de la vitesse de rotation pour $Re = 30$. (b) Variation de flux en fonction de z pour différentes valeurs de la vitesse de rotation pour $Re = 85$.

une section droite, la température de l'écoulement n'est pas une fonction monotone décroissante. En conclusion on constate que l'approche asymptotique de la solution avec couplage vers les cas classiques de température de paroi constante ou de flux constant à la paroi se vérifie d'autant mieux que la vitesse de rotation est faible. Ces résultats sont comparés par la suite aux résultats du cas du régime périodique.

4.3.2 Cas du régime périodique

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude du cas d'une vitesse d'injection du type sinusoïdale combinée avec une vitesse de rotation de même nature exprimée par : $V = V_{\max}/2(1 + \varepsilon_v \sin \omega t)$ où $V_{\max}$ est la vitesse de rotation maximale permettant de conserver la stabilité dynamique de l'écoulement non périodique où ε_v est l'amplitude du

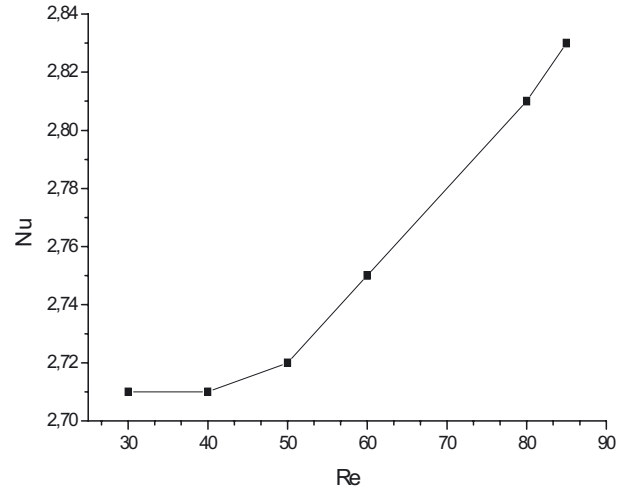


Fig. 18. Variation de Nu global en fonction du nombre de Reynolds.

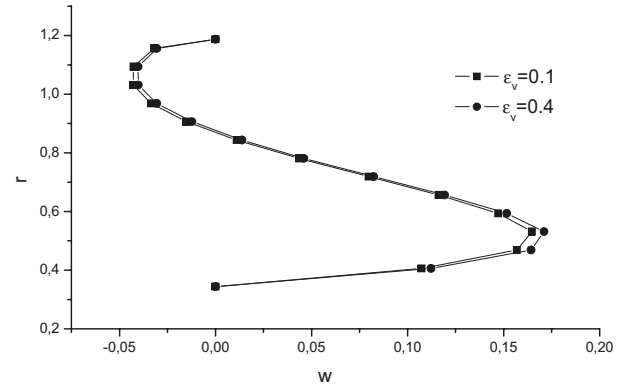


Fig. 19. Variation du profil radial de la composante axiale de la vitesse pour différentes vitesses de rotation et pour $Re = 80$.

mouvement périodique, ω est la pulsation, elle est prise égale à la pulsation du mouvement périodique du débit afin d'éliminer la modulation de l'amplitude résultante de la superposition des deux mouvements périodiques, celui de la vitesse de rotation et celui de la vitesse d'entrée (débit). Cette modulation peut dans certains cas donner naissance à des amplitudes très grandes qui sont à l'origine d'instabilités dans l'écoulement.

L'amplitude de la vitesse de rotation est comprise entre $\varepsilon_v = 0,1$ et $0,4$. Au-delà de cette dernière valeur le calcul diverge. L'influence de la vitesse de rotation sur la composante axiale w (Fig. 19) est peu perceptible, mais, pour $\varepsilon_v = 0,4$, la composante radiale (Fig. 20) de la vitesse augmente, ce qui favorise le transfert thermique par convection (Figs. 21, 22). Ces résultats sont comparables à ceux trouvés dans le cas d'un solide en rotation pour un écoulement non pulsé [32].

4.4 Influence de la différence de phase

On se limite dans cette étude à un seul cas de déphasage entre la vitesse de rotation et la vitesse

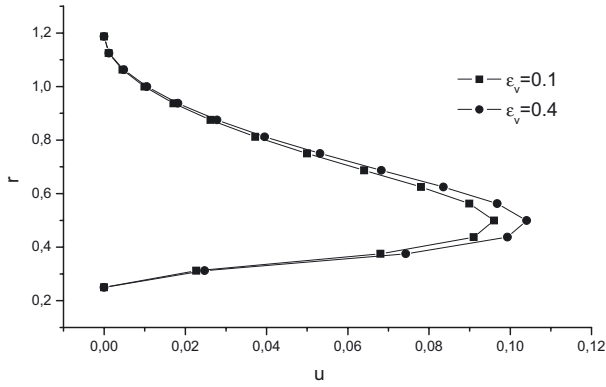


Fig. 20. Variation du profil radial de la composante radiale de la vitesse pour différentes vitesses de rotation et pour $Re = 80$.

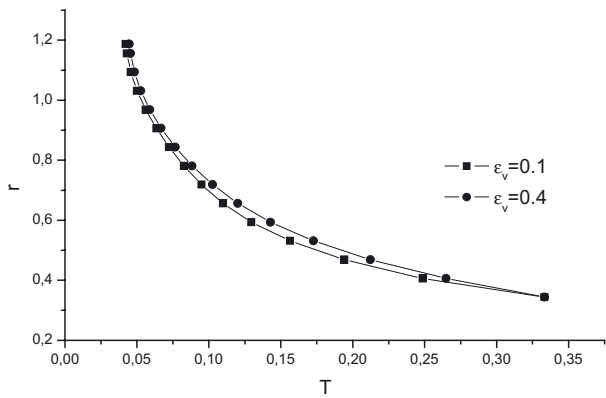


Fig. 21. Variation du profil radial de la température pour différentes vitesses de rotation et pour $Re = 80$.

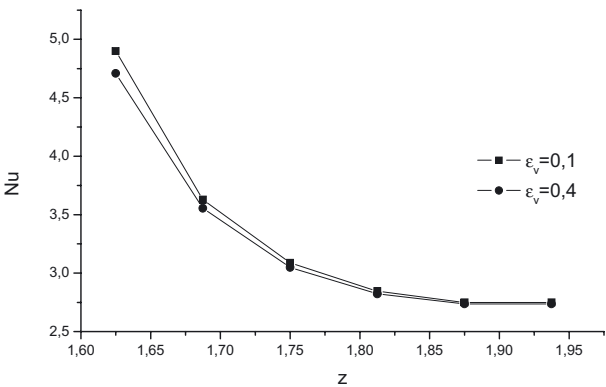


Fig. 22. Variation du nombre de Nusselt global en fonction de la coordonnée z pour différentes vitesses de rotation et pour $Re = 80$.

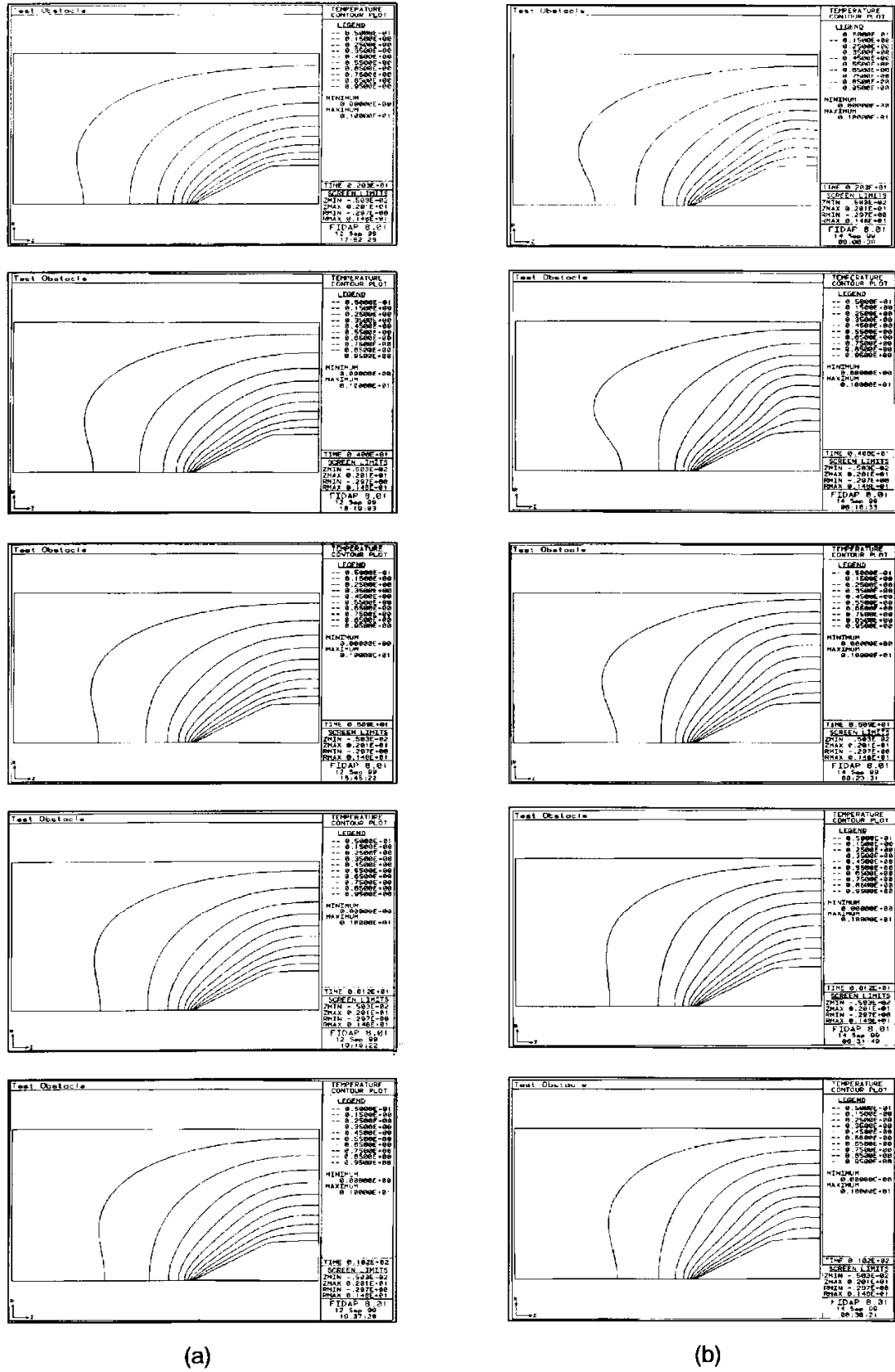
d'injection du fluide correspondant à $\varphi = -\pi/4$. Les résultats montrent que l'existence du déphasage entre l'écoulement principal et la vitesse de rotation de l'obstacle influe légèrement sur le champ dynamique et que le champ thermique est quasiment insensible à cette variation (Fig. 23).

4.5 Influence de la conductivité

Diverses valeurs du rapport de la conductivité, comprises entre 10^{-2} et 10^3 , ont été utilisées. L'objectif est d'étudier l'influence de ce rapport sur le champ thermique et de les comparer aux cas classiques du transfert thermique sans couplage. Cette étude a été effectuée en utilisant uniquement par les différences-finies. En faisant varier le rapport K , on constate que la conduction à l'intérieur du solide commence à se manifester réellement à partir de $K = 10^{-1}$. On remarque que pendant la première phase de la période, le solide « chaud » cède de la chaleur au fluide « froid », alors que pendant la deuxième phase on constate que la partie du solide initialement refroidie commence à se réchauffer au contact du fluide. Ceci indique que le flux de chaleur change de signe au bout d'un intervalle de temps comparable à la période du débit d'entrée. Par contre la convection évolue au cours du temps sans présenter un caractère de périodicité. On note ainsi que lorsque K diminue la partie du solide, concerné par l'échange thermique, augmente et la périodicité de la variation de la température de paroi est retardée. Par ailleurs, la région de l'écoulement concernée par l'échange thermique devient moins importante. À l'intérieur du solide la conduction a tendance à être imperceptible à partir de $K = 1$ pour laisser place à un échange thermique qui s'oriente dans le sens d'un découplage entre le solide et le fluide. La région d'échange thermique dans l'écoulement s'étend davantage lorsque K varie de $K = 1$ à $K = 10$. Au-delà de $K = 10$ cette zone ne subit pas de variations notables ce qui signifie que l'échange thermique est de moins en moins dépendant du rapport des conductivités. La température de la région au contact du solide atteint la valeur de la température de ce dernier pour les grandes valeurs de K , un équilibre thermique est alors atteint (Fig. 24).

4.5.1 Influence de la conductivité sur les différents paramètres thermiques

Concernant la température de paroi, on constate que pour les faibles valeurs de la conductivité, par exemple $K = 10^{-2}$, elle augmente le long de la paroi conique pour atteindre une valeur constante le long de la paroi cylindrique. Pour les grandes valeurs de K , ($K = 10^{+3}$), cette température est identique avec celle d'une paroi maintenue à température constante. Le flux convectif (Q_f) est plus important pour les faibles valeurs de la conductivité que pour les grandes valeurs. Il est confondu avec celui correspondant au cas d'une paroi à température constante dans le cas des grandes valeurs de la conductivité. Le flux conductif (Q_s) se manifeste davantage dans la paroi conique que dans la paroi cylindrique. Lorsque la conductivité augmente, le flux conductif tend vers sa valeur d'équilibre $Q_s = 0$, correspondant à la valeur relative à un échange thermique se faisant à température de paroi constante. On constate que le nombre de Nusselt global a tendance d'augmenter quand le rapport de conductivité diminue (Fig. 25). Alors que la température moyenne



(a)

(b)

Fig. 23. Lignes isothermes (par éléments-finis) pour différents temps (du haut en bas : $t = t_1 = T/4$; $t = t_2 = T/2$; $t = t_3 = 3T/4$; $t = t_4 = T$; $t = t_5 = 5T/4$) et pour (a) $\phi = 0$, (b) $\phi = \pi/2$, cas : $w_0 = 0,5$, $\varepsilon_w = 0,1$, $v_0 = 0,5$, $\varepsilon_v = 0,1$.

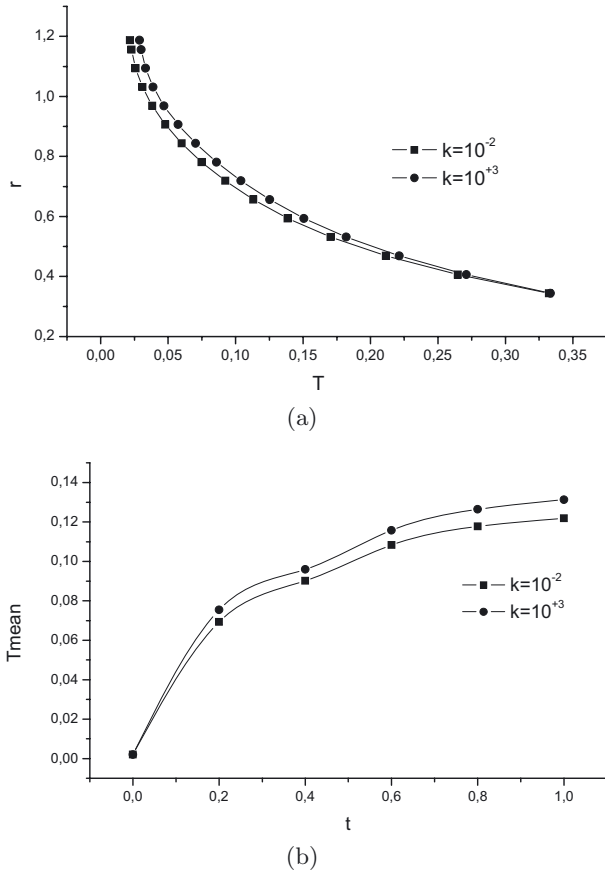


Fig. 24. (a) Variation du profil radial ($z = 1,6875$) de la température pour différentes conductivités et pour $Re = 80$. (b) Variation de la température moyenne au cours du temps pour différentes conductivités et pour $Re = 80$.

du fluide diminue légèrement (Fig. 24). La variation du nombre de Nusselt global au cours du temps présente une forme oscillatoire pour les deux cas de la conductivité (Fig. 26). Les valeurs du nombre de Nusselt global sont plus grandes dans le cas correspondant aux faibles valeurs de la conductivité ($K = 10^{-2}$) que dans le cas correspondant à une faible conductivité ($K = 10^{+3}$). Une partie de ces résultats a fait l'objet d'une communication [33].

4.5.2 Discussions des limites de la valeur de K

Pour les grandes valeurs de K ($K \geq 10^2$) l'échange thermique entre le solide et le fluide se rapproche du cas d'une température constante à la paroi. Par contre pour les faibles valeurs de K ($K \leq 10^{-2}$) le champ thermique tend à présenter une grande similitude avec le cas d'une température de paroi du solide variant périodiquement autour d'une valeur moyenne et avec une avance de phase de $\pi/2$ par rapport au mouvement périodique de l'écoulement d'entrée. Il est intéressant de rapprocher ces résultats de ceux trouvés par Aplet [12]. En utilisant les approximations d'Oseen, Davies [13] a fait l'étude du transfert thermique d'une sonde se trouvant dans un

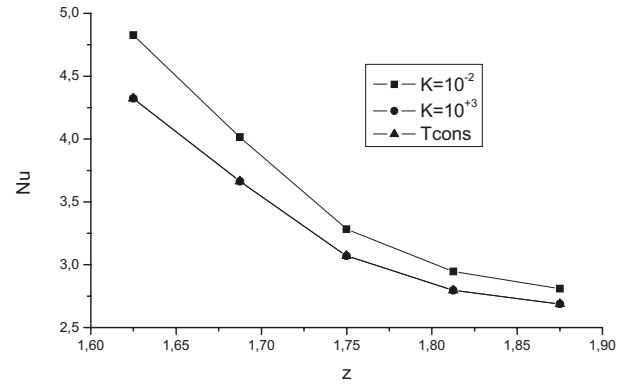


Fig. 25. Variation du nombre de Nusselt local en fonction de la coordonnée z pour différentes conductivités et pour $Re = 80$.

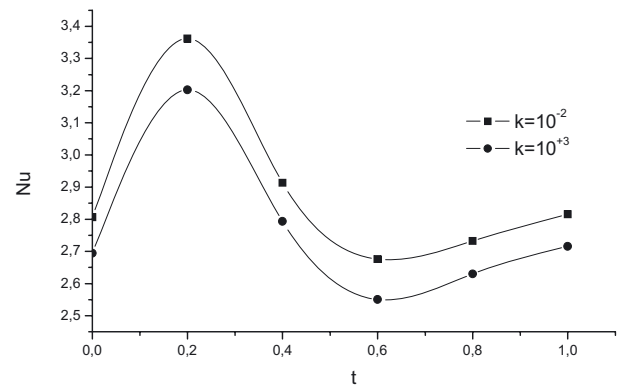


Fig. 26. Variation du nombre de Nusselt global au cours du temps pour différentes conductivités et pour $Re = 80$.

écoulement périodique pour $Re \ll 1$. Il a montré que pour les faibles fréquences, le coefficient du transfert thermique est en phase avec la vitesse de l'écoulement et que sa valeur est identique à celle obtenue dans le cas stationnaire. Dans le cas de grandes fréquences, ce coefficient était en avance de phase de $\pi/2$ sur la vitesse, sa valeur relative est proportionnelle à l'inverse de la fréquence. Quant à Aplet [12], il a montré que le coefficient du transfert thermique variait d'une façon périodique, son amplitude étant plus petite que celle du cas stationnaire correspondant. Son déphasage par rapport à la vitesse était 41° . Ces derniers résultats concernant un débit d'air ($Pr = 0,7$) périodique de Reynolds moyen $Re_{em} = 10$ et d'une amplitude de 10 %.

5 Conclusion

Les deux méthodes numériques utilisées – différences-finies et éléments-finis – ont donné lieu à des résultats très comparables mais il convient de relever certaines de leurs différences. Du fait du maillage utilisé dans la méthode des éléments-finis, cette dernière présente une grande précision du calcul dans les zones proches de la paroi solide. Par contre, la résolution de l'équation de la conduction à l'intérieur du solide est plus directe avec

la méthode des différences-finies. L'étude de l'influence de la périodicité d'un paramètre de l'écoulement sur le comportement dynamique et thermique a été examinée numériquement par deux méthodes : différences-finies et éléments-finis. Les résultats montrent que dans le cas d'un débit périodique, l'augmentation de l'amplitude influe surtout sur la composante axiale de la vitesse, dont la forme périodique est d'autant plus apparente que l'amplitude augmente.

Sur le champ thermique, l'influence de l'amplitude n'a d'effet que sur la zone concernée par l'échange convectif, se trouvant au-delà de la zone de la conduction pure. Il est à noter que cette amplitude provoque des instabilités thermiques au-delà de certaines valeurs dans le cas de la variation périodique du nombre de Reynolds. L'influence de la fréquence se manifeste davantage pour des valeurs supérieures à 10 fois la valeur de la fréquence de référence. Le nombre de Nusselt global est proportionnel à l'amplitude de perturbation de la vitesse d'entrée. Il est d'autant plus élevé que l'amplitude de la vitesse de rotation est grande. L'apparition de déphasage entre la vitesse d'entrée, la pression et les différents paramètres thermiques lorsque la fréquence augmente.

En ce qui concerne l'influence du rapport des conductivités K sur le champ thermique dans le cas d'un écoulement périodique, les résultats permettent les constations suivantes :

- Pour les grandes valeurs ($K \geq 10^3$) l'échange thermique entre le solide et le fluide se rapproche du cas d'une température constante à la paroi.
- Pour les faibles valeurs ($K \leq 10^{-2}$) le champ thermique dans l'écoulement présente une grande similitude avec le cas d'une température de paroi variant périodiquement et en avance de phase de $\pi/2$ sur le débit.

Annexe : Schéma ADI pour le milieu solide

Description de la méthode

Les difficultés rencontrées pour la résolution de l'équation de la chaleur par les algorithmes conventionnels ont conduit à recourir à l'utilisation des méthodes implicites aux directions alternées (ADI). Ces méthodes ont été développées par Peaceman (1955), Rachford et Douglas (1955) en particulier. Ces méthodes consistent à résoudre un système algébrique tridiagonal dans une direction à chaque étape. L'une des méthodes la plus usuelle est celle à deux étapes, elle consiste à résoudre un système algébrique tridiagonal dans une direction à chaque étape. Durant la première étape une matrice tridiagonale est résolue pour chaque valeur de j (ordonné) du domaine. Durant la deuxième étape, une matrice tridiagonale est résolue pour chaque valeur de i (abscisse) du domaine. Cette méthode est précise à l'ordre deux dans l'espace et dans le temps, elle est stable sans condition.

Discretisation de l'équation de la conduction

L'équation de conduction $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$ se discrétise en deux étapes sous la forme suivante :

1^{ère} étape :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \alpha \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)^n + \frac{\partial^2 T^{n+1/2}}{\partial Z^2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \right]$$

2^e étape :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \alpha \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)^{n+1} + \frac{\partial^2 T^{n+1/2}}{\partial Z^2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \right]$$

où les opérateurs de différenciation spatiale s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= 2T_{i,j+1} \frac{1}{(r(j+1) - r(j))(r(j+1) - r(j-1))} \\ &\quad - 2T_{i,j-1} \frac{1}{(r(j-1) - r(j))(r(j+1) - r(j-1))} \\ &\quad + 2T_{i,j} \frac{1}{(r(j-1) - r(j))(r(j+1) - r(j))} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{r(j)} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{r(j) - r(j-1)} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} &= \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta Z^2} \end{aligned}$$

avec $\Delta Z = Z(i+1) - Z(i) = Z(i) - Z(i-1) = \text{const.}$
Pour chaque j donné, la première étape s'écrit :

$$a_2 T_{i-1,j}^{n+1/2} + a_3 T_{i,j}^{n+1/2} + a_4 T_{i+1,j}^{n+1/2} = a_6$$

Les constantes sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\alpha \Delta t}{2 \Delta Z^2 \cos^2 \theta}, \quad a_3 = 1 + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta Z^2 \cos^2 \theta}, \\ a_4 &= -\frac{\alpha \Delta t}{2 \Delta Z^2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 &= T_{i,j}^n \left(1 + \frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{r(j+1) - r(j-1)}{\text{Denor}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{1}{r(j)(r(j) - r(j-1))} \right) \\ &\quad - T_{i,j-1}^n \left(\frac{r(j+1) - r(j)}{\text{Denor}} \frac{\alpha \Delta t}{2} + \frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{1}{r(j)(r(j) - r(j-1))} \right) \\ &\quad + T_{i,j+1}^n \frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{r(j-1) - r(j)}{\text{Denor}} \end{aligned}$$

avec : $\text{Denor} = (r(j-1) - r(j))(r(j+1) - r(j))(r(j+1) - r(j-1))/2$

La deuxième étape s'écrit :

$$a_1 T_{i,j-1}^{n+1} + a_3 T_{i,j}^{n+1} + a_5 T_{i,j+1}^{n+1} = a_6$$

avec :

$$a_1 = \frac{\alpha \Delta t}{2} \left(\frac{r(j+1) - r(j)}{\text{Denor}} + \frac{1}{r(j)(r(j) - r(j-1))} \right)$$

$$a_3 = 1 - \frac{\alpha \Delta t}{2} \left(\frac{r(j+1) - r(j-1)}{\text{Denor}} + \frac{1}{r(j)(r(j) - r(j-1))} \right)$$

$$a_5 = -\frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{r(j-1) - r(j)}{\text{Denor}}, a_6 = -\frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{1}{\Delta Z^2 \cos^2 \theta} T_{i-1,j}^{n+1/2}$$

$$+ \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta Z^2 \cos^2 \theta} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta Z^2 \cos^2 \theta} T_{i,j}^{n+1/2}$$

Traitement des conditions aux limites

(1) Dans la première étape

Durant la première étape le calcul se fait par la résolution d'une matrice tridiagonale pour chaque j du domaine ce qui implique le traitement implicite des conditions aux limites aux frontières gauche et droite et le traitement explicite de ces conditions aux frontières basse et haute.

Condition limite gauche : la condition à la limite gauche est relative au sommet du cône qui a été approximé par un segment de droite, elle s'exprime par l'égalité des flux échangés entre le solide et le fluide dans la direction axiale

$$k_s \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_s = k_f \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_f$$

qui s'exprime après discrétisation sous la forme suivante : $a_3 T_{i,j} + a_4 T_{i+1,j} = a_6$, avec $a_3 = (k_f + k_s)/\Delta z$, $a_4 = -k_s/\Delta z$, $a_6 = k_f/\Delta z T_{i-1,j}$

- Condition limite droite : sur cette limite on utilise la condition de gradient nul : $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$.
- Elle s'exprime après discrétisation : $a_3 T_{IM,J} = a_2 T_{IM-1,J} = 0$, avec : $a_3 = 1$ et $a_2 = -1$.
- Conditions à la limite basse : sur l'axe la condition de symétrie est : $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$.
- Qui s'exprime après discrétisation : $a_{55} T_{I,2} + a_{33} T_{I,1} = 0$, avec : $a_{33} = 1$ et $a_{55} = -1$.

Condition à la limite haute : cette frontière se compose de deux parties ; une partie conique et une partie cylindrique. Le traitement rigoureux de la partie conique nécessite la résolution d'une matrice pentadiagonale. Afin de garder la même méthode de résolution, une approximation de cette condition par celle de la paroi horizontale a été faite. Moyennant ces remarques la condition retenue pour la frontière supérieure est :

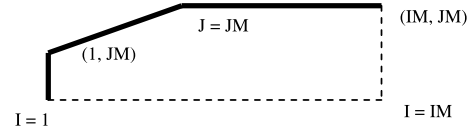
$$k_f \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_f = k_s \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_s$$

qui s'exprime après discrétisation : $a_{33} T_{i,JM} = a_{11} T_{i,JM-1} + a_{66}$. où : $a_{11} = k_s/\Delta r$, $a_{33} = -(k_s + k_f)/\Delta r$, $a_{66} = k_f/\Delta r T_{i,JM+1}$.

- (2) Dans la deuxième étape. Durant la deuxième étape le calcul se fait par la résolution d'une matrice tridiagonale pour chaque valeur de i du domaine, ce qui implique le traitement implicite des conditions aux limites aux frontières basse et haute et le traitement explicite de ces conditions aux frontières gauche et droite.

- Conditions à la limite sur la frontière basse : c'est la condition de symétrie $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$. Elle s'exprime après discrétisation : $a_3 T_{I,1} + a_5 T_{I,2} = 0$, avec $a_3 = 1$, $a_5 = -1$.
- Conditions à la limite sur la frontière haute : cette condition s'exprime de la façon suivante : $a_1 T_{i,JM-1} + a_3 T_{i,JM} = a_6$, avec $a_1 = k_s/\Delta r$, $a_3 = (k_f + k_s)/\Delta r$, $a_6 = k_f/\Delta r T_{i,JM+1}$.
- Conditions à la limite sur la frontière gauche : cette condition s'exprime de la façon suivante : $a_{33} T_{i,j} = a_{44} T_{i+1,j} + a_{66}$, avec $i = 1$ où $a_{33} = (k_f + k_s)/\Delta z$, $a_{66} = k_f/\Delta z T_{i-1,j}$, $a_{44} = k_s/\Delta z$.
- Conditions à la limite sur la frontière droite. Cette condition s'exprime comme suit : $a_{33} T_{IM,j} + a_{22} T_{IM,j} = 0$, avec : $a_{22} = -1$, $a_{33} = 1$.

- (3) Calcul des points particuliers : les points se trouvant aux bords des frontières (voir schéma ci-dessous) nécessitent un traitement particulier, en général ils sont calculés par application de la conservation de l'énergie dans un volume de contrôle [A1] ou par application de l'égalité de flux à travers une direction donnée. Dans notre problème nous avons deux points de ce type, le point ($I = 1, J = JM$) et le point ($I = IM, J = JM$).



La température au point (1, JM) a été prise égale à celle se trouvant au point du dessous : (1, JM - 1). Cette approximation est justifiée par le fait que le segment approchant le sommet du cône a une longueur infiniment petite.

On a donc : $T(1, JM) = T(1, JM - 1)$

Le point (IM, JM) est calculé par l'égalité des flux de chaleur : $k_f \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_f = k_s \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_s$.

Relation qui s'exprime après discrétisation :

$$a_{33} T_{IM,JM} = a_{11} T_{IM,JM-1} + a_{55} T_{IM,JM+1},$$

où : $a_{33} = (k_f + k_s)/\Delta Z$, $a_{11} = k_s/\Delta r$, $a_{55} = k_f/\Delta r$.

Références

- [1] H.B. Atabek, C.C. Chang, Oscillatory flow near the entry of circular tube, Zamp 12 (1961) 403–422
- [2] D.G. Drake, On the flow in a channel due to a periodic pressure gradient, Quart. J. Mech. Appl. Math. 118 (1965)
- [3] D. Gedeon, Mean parameter modelling of oscillating flow, J. Heat Trans. 108 (1986) 513–518
- [4] S.R. Huebner, A finite difference analysis of heat transfer in periodic cavity flows, Numerical Meth. Laminar Turbulent Flow 6 (1989) 1265–1275

- [5] P. André, R. Creff, Étude des conditions particulières de fréquence favorisant les transferts thermiques en écoulements pulsés en canalisation cylindrique, *Int. J. Heat Mass Trans.* 24 (1981) 1211–1219
- [6] A. Yakhot, L. Grinberg, Phase shift ellipses for pulsating flows, *Phys. Fluids* 15 (2003) 2081–2083
- [7] R. Sevirino, Farias Neto, Simulation numérique du transfert de matière global dans un écoulement tourbillonnaire non entretenu – Cas des forts nombres de Schmidt, 14^e Congrès Français de mécanique Toulouse, France, 1999
- [8] S. Kakac, Y. Yenner, Exact solutions of transient forced convection energy equation for time with variation of inlet temperature, *Int. J. Heat. Mass. Trans.* 16 (1973) 2205–2214
- [9] J. Suces, An improved quasi-study approach for transient conjugated forced convection problems, *Int. J. Heat. Mass. Trans.* 24 (1981) 1711–1722
- [10] M.T. Acker, B. Fourcher, Analyse en régime thermique périodique du couplage conduction convection entre un fluide en écoulement laminaire et une paroi de stockage, *Int. J. Heat. Mass. Trans.* 24 (1981) 1201–1210
- [11] P. Singh, V. Radhkrishnan, Fluctuation flow due to unsteady rotation of a disk, *AIAAA J.* 27 (1988) 150–154
- [12] C.T. Aplet, M.A. Ledwich, Heat transfer in transient and unsteady flow past a heated circular cylinder in the range $1 \leq R \leq 40$, *J. Fluid. Mech.* 95 (1979) 761–777
- [13] G. Huw, Davies, Fluctuating heat transfer from hot wires in low Reynolds Number, *J. Fluid. Mech.* 73 (1976) 49–51
- [14] M. Lachi, G. Polidori, M. Rebay, J. Padet, Convention forcée instationnaire sur une plaque soumise à une perturbation de flux périodique, 14^e Congrès Français de Mécanique, Toulouse, France, 1999
- [15] Majdalani, Pulsatory channel flows with arbitrary pressure gradients, *AIAA*, 3rd, Theoretical fluid mechanics meeting, 2002, pp. 24–26
- [16] T. Zhao, a Numerical Solution of laminar flow convection in a heated pipe subjected to a reciprocating flow, *Int. J. Heat. Mass. Trans.* 38 (1995) 3011–3022
- [17] Byunng-Hun Kim, Modelling pulsed blowing systems for active flow control. Ph.D. Thesis Chicago, Illinois, 2003
- [18] F. Fedel, D. Hitt, R.D. Prabhu, Revisiting the stability of pulsatile pipe flow, *Eur. J. Mech. B/Fluids* 24 (2005) 237–254
- [19] Hadj Ali, Contribution à l'étude dynamique et thermique d'un écoulement pulsé dans une conduite horizontale en présence d'un obstacle cylindrique chauffé, Thèse de Magister, université USTHB, 2006
- [20] P.A. Mackrodt, Stability of Hagen-Poiseuille flow with superimposed rigid rotation, *J. Fluid. Mech.* 73 (1976) 153–164
- [21] J.M. Owen, J.R. Pincombe, Velocity measurements inside a rotating cylindrical cavity with a radial outflow of fluid, *J. Fluid. Mech.* 99 (1980) 111–127
- [22] J. Legrand, F. Couere, Transfert de matière globale liquide-paroi pour des écoulements associant tourbillons de Taylor et circulation axiale forcée, *I.J. H.M.T.* 25 (1982) 345–351
- [23] F.H. Harlow, J.E. Welch, Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow with free surface, *Phys. Fluids* 8 (1965) 2182–2190
- [24] R. Temam, Sur l'approximation des équations de Navier Stokes par la méthode des pas fractionnaires *Arch. Rat. Mech. Anal.* 32 (1969) 377–385
- [25] M. Fortin, R. Peyret, R. Teman, Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, *J. Mech.* 10 (1971) 357–390
- [26] R. Peyret, Unsteady evolution of a horizontal jet in a stratified fluid, *J. Fluid. Mech.* 78 (1976)
- [27] R. Peyret et al., Calcul de l'écoulement d'un fluide visqueux compressible autour d'un obstacle de forme parabolique, *Lecture Notes de Physique* 19 (1973) 222–229
- [28] A. Ghezal, J.C. Loraud, Écoulement confiné d'un fluide visqueux incompressible autour d'un obstacle cylindro-conique, *Mech. Res. Com.* 11 (1984) 83–89
- [29] A. Ghezal, J.C. Loraud, Écoulement confiné d'un fluide visqueux incompressible autour d'un obstacle cylindro-conique en mouvement hélicoïdal, *Mech. Res. Com.* 16 (1989) 183–189
- [30] A. Ghezal, B. Porterie, J.C. Loraud, Modélisation du transfert de chaleur, avec couplage conduction convection, entre un obstacle en mouvement hélicoïdal est un fluide visqueux en écoulement confiné, *Int. J. Heat. Mass. Trans.* 329–341 (1992)
- [31] Z. Ouchiha, A. Ghezal, J.C. Loraud, M. Saighi, A. Benzaoui, Digital simulation of a vertical Newtonian fluid flow in the presence of a heated cylindrical obstacle, *AMSE* 72 (2003)
- [32] A. Ghezal, Z. Ouchiha, J.C. Loraud, Étude des instabilités dynamique et thermique dans un écoulement autour d'un obstacle chauffé en rotation 17^e Congrès Français de Mécanique, Troyes, France, 2005
- [33] A. Ghezal, N. Ait Moussa, Z. Ouchiha, J.C. Loraud, Frequency influence on thermal exchange in spiral flow, 4th international conference on heat transfer, fluid mechanics and thermodynamics, Cairo, Hefat Egypt paper number GA, 2005