

## Rigidité en flexion d'un vilebrequin

BILEL BELLAKHDHAR<sup>1,a</sup>, ABDELWAHEB DOGUI<sup>1</sup> ET JEAN-LOUIS LIGIER<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université de Monastir, Laboratoire de Génie Mécanique, ENIM, Avenue Ibn Eljazzar, 5019 Monastir, Tunisie

<sup>2</sup> Direction de l'ingénierie Mécanique, Renault SAS, 67 rue des Bons Raisins, 92508 Rueil-Malmaison Cedex, France

Reçu le 25 mai 2010, accepté le 4 octobre 2010

**Résumé** – Durant les premières étapes de dimensionnement d'un moteur, on définit des cotes clefs relatives en particulier au vilebrequin. Le choix approprié de ces cotes, dimensionnant pour d'autres pièces, nécessite plusieurs itérations. N'étant pas aisé de faire appel à des calculs de structure de type éléments-finis qui seront coûteux en temps et qui nécessitent des moyens de calcul importants, un calcul de type « résistance des matériaux » peut être utile, rapide et suffisamment précis dans ce cas. Le vilebrequin est alors modélisé en flexion par un arbre cylindrique, composé de quatre tronçons à section elliptique. Chaque tronçon représente une partie inter-paliers du vilebrequin d'un moteur quatre cylindres en ligne. Ce travail présente une méthodologie d'identification des caractéristiques géométriques des sections droites elliptiques équivalentes d'une modélisation de type R.d.M. sensées représenter la géométrie réelle du vilebrequin. Disposant de la CAO du vilebrequin et du chargement réel au cours du cycle moteur on calcule en élasticité tridimensionnelle par éléments-finis les réactions aux paliers. Par comparaison avec des calculs de même type du modèle R.d.M., on identifie les sections et leur ellipticité pour la poutre « vilebrequin ». Cette méthodologie a le mérite d'être simple et efficace lors des calculs quasi statiques du vilebrequin.

**Mots clés** : Vilebrequin / rigidité en flexion / identification / réactions aux appuis / dimensionnement

**Abstract – Crankshaft bending stiffness.** During the first stages of dimensioning of an engine, we must define major dimensions in particular those related to the crankshaft. The suitable choice of these coasts, dimensioning for other parts, requires several iterations. In such a situation, it is not easy to have resorts to structural finite-elements analysis which requires important means of calculation and lot of time. Using a simplified model based on beam theory can be useful, fast and sufficiently accurate. The crankshaft is modeled by a cylindrical shaft, composed of four sections with elliptic cross-section. Each section represents a part between two bearings of the crankshaft of a four cylinders on line engine. This work presents a methodology of identification of the geometrical characteristics of the equivalent elliptic cross-sections which must behave like the real crankshaft. Owing the CAD of the crankshaft of a four cylinder engine and the real loading along the combustion cycle we calculate with the finite element method the reactions in the crank journals. By comparison between elasticity with finite elements and strength of material approach we determine the specific inertias of the “crankshaft” beam. This methodology is simple and efficient to be used during quasi static calculations of the crankshaft.

**Key words:** Crankshaft / bending stiffness / identification / main bearing loads / dimensioning

### 1 Introduction

Dans la recherche continue de réduction de consommation des moteurs thermiques, les solutions adoptées, notamment le « downsizing », les vilebrequins sont de plus en plus sollicités. Leur développement nécessite la connaissance précise de leurs rigidités d'une part et des efforts extérieurs qu'ils subissent d'autre part. Le choix approprié de leurs géométries et dimensions requiert

plusieurs itérations de calcul et de vérifications. Pour répondre rapidement à ces questions, des méthodes simplifiées de calcul de structure de type « résistance des matériaux » (R.d.M.) prennent la place des calculs de type éléments-finis lourds et coûteux [1]. Si ces modèles de calculs simplifiés sont suffisamment fins pour appréhender de façon réaliste les phénomènes physiques prépondérants, ils peuvent être suffisamment précis dans ce cas.

Dans le cas d'un moteur à quatre cylindres, le vilebrequin est généralement représenté par une poutre droite sur cinq appuis (les cinq paliers) [2, 3]. Plusieurs aspects

<sup>a</sup> Auteur pour correspondance : [bileling@yahoo.fr](mailto:bileling@yahoo.fr)

## Nomenclature

$a_i, b_i$	Deux demi-axes de l'ellipse correspondant à la section $i$ (mm)
$E$	Module de Young du matériau (MPa)
EF-2AT	Modèle éléments-finis 2 appuis, effort au niveau du tourillon
EF-5AM	Modèle éléments-finis 5 appuis efforts aux niveaux des manetons
$F$	Effort vertical appliqué (N)
$f_i$	Flèche au milieu du tronçon $i$ ( $\mu\text{m}$ )
$f_v$	Flèche verticale ( $\mu\text{m}$ )
$J_X$	Moment d'inertie principal de la section droite suivant la direction $X$ ( $\text{mm}^4$ )
$J_Y$	Moment d'inertie principal de la section droite suivant la direction $Y$ ( $\text{mm}^4$ )
$M, M'$	Moments fléchissants en $z = 0^+$ et $z = l^-$
$M_f$	Moment fléchissant le long de la poutre
$P_i$	Effort de la bielle $i$ (N)
$R_i$	Effort de réaction de l'appui $i$ (N)
RdM-F3P	Modèle RdM flexion 3 points
RdM-H5A	Modèle RdM hyperstatique à 5 appuis
$S_i$	Section $i$
$u$	Flèche
$U_d, U_g$	Déplacements aux droites des appuis de droite et de gauche
$\omega$	Rotation de section droite
$\Omega_i$	Rotation de la section droite correspondant à l'appui $i$ (rad)
$\theta$	Angle vilebrequin ( $^\circ$ )
$\Omega_d, \Omega_g$	Rotations des sections droites correspondant à l'appui de droite et de gauche
$\varphi$	Angle entre le repère principal d'inertie et le repère attaché au vilebrequin
$\psi$	Angle entre l'axe vertical et l'axe principal $X$ de la poutre

peuvent être pris en compte dans une telle modélisation : désalignements, jeux et rigidités, etc. [4]. La rigidité équivalente en flexion du vilebrequin doit être déterminée rapidement et précisément à partir de sa géométrie réelle. En effet, elle affecte directement la répartition des efforts de réaction. La méthode classique de détermination de cette rigidité consiste à réaliser un essai de flexion « trois points » sur le vilebrequin réel [5, 6] : il s'agit de poser le vilebrequin sur deux appuis en V au niveau du milieu des deux tourillons extrêmes et d'appliquer un effort au niveau du tourillon central; la rigidité moyenne du vilebrequin est alors obtenue à travers le modèle R.d.M. classique par le rapport de la force appliquée sur la flèche mesurée au point d'application de cette force.

Dans la présente analyse, on montre la limite de cette approche et on propose une méthodologie permettant, à partir de la connaissance de la géométrie réelle du vilebrequin (CAO d'un vilebrequin), de déterminer de façon plus réaliste sa rigidité équivalente en flexion ciblée vers le calcul des efforts aux paliers du vilebrequin.

## 2 Méthodologie

La méthodologie proposée consiste à identifier la rigidité en flexion d'une poutre droite à section elliptique à travers le recalage de la réponse d'un modèle de type R.d.M. avec celle d'un modèle éléments-finis correspondant à une géométrie réelle d'un vilebrequin. Le modèle éléments-finis est implémenté sous le logiciel ABAQUS<sup>®</sup>. Le vilebrequin présente 42 812 nœuds et 209 608 éléments

tétraédriques à quatre nœuds « C3D4 » bien adaptés pour le maillage des géométries complexes. Différentes sollicitations de flexion sont considérées afin de comparer les résultats obtenus et d'identifier les plus pertinents.

### 2.1 Modèle « éléments-finis »

#### 2.1.1 Modèle « EF-2AT »

Le vilebrequin est encastré aux niveaux des sections droites correspondant aux milieux des tourillons 1 et 2 (Fig. 2). Les nœuds de la section du milieu du tourillon 1 sont couplés cinématiquement à un point de référence. On applique un effort vertical de module  $F$  en ce point et on détermine la flèche correspondante. Ce modèle sera calé sur celui d'une poutre droite bi encastrée et soumise à une force verticale en son centre pour déterminer la rigidité totale du vilebrequin. Cette modélisation s'apparente à la procédure expérimentale, mentionnée en introduction, utilisée pour déterminer la rigidité globale d'un vilebrequin [5, 6].

#### 2.1.2 Modèle « EF-5AM »

Le vilebrequin est considéré dans un état de fonctionnement normal donc en appui sur cinq paliers supposés courts (pas de reprise de flexion) et soumis aux efforts de bielles sur les manetons. Les nœuds correspondant à la

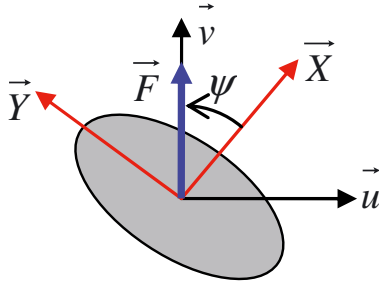


Fig. 1. Section équivalente de la poutre.

section du milieu de chaque tourillon et de chaque maneton sont couplés cinématiquement à un point de référence au centre de chacune des sections. L'ensemble des points de référence correspondant aux tourillons 1, 2, 4 et 5 est bloqué en translation dans le plan perpendiculaire à l'axe du vilebrequin et bloqué en rotation autour de cet axe (Fig. 2); ceci afin de s'approcher du modèle R.d.M. avec appuis ponctuels rigides et d'éliminer le mouvement de rotation du vilebrequin autour de son axe. Le point de référence correspondant au milieu du tourillon 1 est bloqué complètement en translation et bloqué en rotation autour de l'axe du vilebrequin. On applique les efforts réels correspondant à chaque maneton aux points de référence relatifs; et ceci pour différentes positions angulaires du vilebrequin. On détermine pour chacune de ces positions les efforts aux points de référence des divers tourillons (réactions aux appuis) et les déplacements aux milieux des manetons (les flèches). Ce modèle sera calé sur celui d'une poutre droite hyperstatique sur cinq appuis.

## 2.2 Modèles « RdM »

### 2.2.1 Modèle « RdM-F3P »

C'est le modèle d'une poutre droite à section elliptique bi encastrée et soumise à une force verticale en son milieu. La figure 1 précise les notations utilisées. Les axes  $(X, Y)$  sont les axes principaux d'inertie de la section droite elliptique.

Le déplacement vertical du milieu de la poutre  $f_v$  est comme suit :

$$f_v = \frac{l^3 F}{192 E} \left( \frac{\sin^2 \psi}{J_X} + \frac{\cos^2 \psi}{J_Y} \right) \quad (1)$$

$J_X$  et  $J_Y$  sont les moments d'inertie principaux de la section droite,  $l$  est la longueur de la poutre et  $\psi$  est l'angle entre l'axe vertical et l'axe  $X$ .

### 2.2.2 Modèle « RdM-H5A »

C'est le modèle d'une poutre droite hyperstatique sur cinq appuis ponctuels soumise au milieu de chaque tronçon (partie entre deux appuis), à une force verticale (Fig. 2). Chaque tronçon  $i$  de longueur  $l_i$  est de section elliptique  $S_i$  constante. Les différentes sections  $S_i$  ont

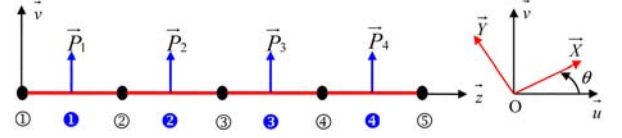


Fig. 2. Arbre sur cinq appuis.

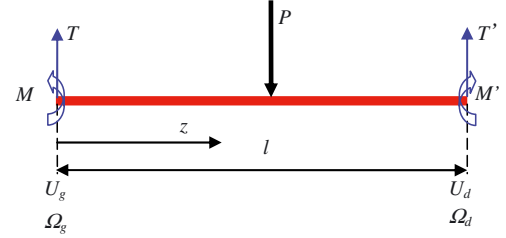


Fig. 3. Étude d'un tronçon.

les mêmes axes principaux d'inertie, mais de dimensions différentes ( $a_i, b_i$ ).

Au milieu de chaque tronçon, est appliquée une force  $P_i$  perpendiculaire à la poutre. La figure 2 précise les notations utilisées : les axes  $(X, Y)$  sont les axes principaux d'inertie des sections droites.

La résolution de ce problème de flexion déviée se décompose en deux problèmes de flexion simple indépendants dans les deux plans de symétrie de la poutre  $(X, z)$  et  $(Y, z)$ .

On considère un tronçon entre deux paliers dans le plan  $(X, z)$ . On désigne par  $T$  et  $M$  respectivement l'effort tranchant et le moment fléchissant en  $z = 0^+$  (Fig. 3). On désigne par  $U_g$  et  $U_d$  les déplacements de l'arbre aux droites des appuis respectivement pour  $z = 0$  et  $z = l$ . On désigne par  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$  les rotations de la section droite de l'arbre au droit des appuis respectivement pour  $z = 0$  et  $z = l$ .

Le moment fléchissant le long du tronçon est linéaire (par morceaux) par rapport à  $z$ , il est défini par :

$$M_f = -EJ \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (2)$$

où  $u$  désigne le déplacement vertical de la poutre. La rotation de la section droite  $\omega(z) = \frac{\partial u}{\partial z}$  est donc quadratique en fonction de  $z$  et le déplacement  $u(z)$  est cubique en fonction de  $z$ .

Les conditions aux limites ci-dessous permettent de déterminer  $\omega(z)$  et  $u(z)$  sur les deux parties du tronçon ( $z \leq l/2$  et  $z \geq l/2$ ) :

$$\omega(0) = \Omega_g ; \omega(l) = \Omega_d ; u(0) = U_g ; u(l) = U_d$$

La continuité du déplacement et de la rotation en  $z = l/2$  impose les deux relations suivantes entre les variables  $(T, M, U_g, U_d, \Omega_g, \Omega_d)$  :

$$\Omega_g = \frac{U_d - U_g}{l} - \frac{(8T + P)l^2 - 24lM}{48EJ_X} \quad (3a)$$

$$\Omega_d = \frac{U_d - U_g}{l} + \frac{(16T + 5P)l^2 - 24lM}{48EJ_X} \quad (3b)$$

L'écriture du déplacement en  $z = l/2$  donne l'expression de la flèche au milieu du tronçon :

$$f = \frac{U_g + U_d}{2} + \frac{-6l^3T + 12l^2M - l^3P}{96EJ_X} \quad (4)$$

La même étude dans le plan  $(Y, z)$  aboutit aux mêmes relations précédentes en remplaçant  $M$  par  $-M$  et  $J_X$  par  $J_Y$ .

En appliquant l'étude précédente aux quatre tronçons, on obtient, pour chaque plan de flexion, huit équations relations du type (3) ne faisant intervenir comme inconnues que les réactions aux appuis  $R_i$ , les déplacements  $U_i$  et les rotations  $\Omega_i$ . On utilise cinq de ces équations pour déterminer les cinq rotations  $\Omega_i$ . Les trois équations qui restent, additionnées aux deux équations d'équilibre global de l'arbre (équilibre de force et de moment) donnent un système linéaire de cinq équations, pour chaque plan de flexion, reliant les réactions aux appuis  $R_i$ , aux déplacements  $U_i$  :

$$\underline{A}_y \underline{R}_y + \underline{B} \underline{U}_y + \underline{C}_y \underline{P}_y = 0 \quad (5a)$$

$$\underline{A}_z \underline{R}_z + \underline{B} \underline{U}_z + \underline{C}_z \underline{P}_z = 0 \quad (5b)$$

Les matrices colonnes de cinq lignes  $\underline{R}$  et  $\underline{U}$  représentent respectivement les réactions  $R_i$  et les déplacements  $U_i$ . La matrice colonne de quatre lignes  $\underline{P}$  représente les efforts  $P_i$ . Les matrices  $\underline{A}_y$ ,  $\underline{A}_z$  et  $\underline{B}$  sont des matrices carrées  $(5 \times 5)$ . Les matrices  $\underline{C}_y$  et  $\underline{C}_z$  sont des matrices  $(5 \times 4)$ .

Les composantes des matrices  $\underline{A}_y$ ,  $\underline{A}_z$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}_y$  et  $\underline{C}_z$  sont données en annexe.

Si on projette ces équations dans le repère moteur  $(O, u, v)$ , on obtient un système de dix équations linéaires :

$$\underline{A} \underline{R} + \underline{B} \underline{U} + \underline{C} \underline{P} = 0 \quad (6)$$

$\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont des matrices  $(10 \times 10)$ ;  $\underline{C}$  est une matrice  $(10 \times 8)$ ;  $\underline{R}$  et  $\underline{U}$  sont des matrices colonnes de 10 et  $\underline{P}$  une matrice colonne de 8.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta [A_X] & \sin \theta [A_X] \\ -\sin \theta [A_Y] & \cos \theta [A_Y] \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \cos \theta [B_X] & \sin \theta [B_X] \\ -\sin \theta [B_Y] & \cos \theta [B_Y] \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \cos \theta [C_X] & \sin \theta [C_X] \\ -\sin \theta [C_Y] & \cos \theta [C_Y] \end{bmatrix}$$

Les cinq premières lignes des matrices  $\underline{R}$  et  $\underline{U}$  et les quatre premières lignes de la matrice  $\underline{P}$  correspondent aux composantes horizontales (selon  $u$ ) et les autres aux composantes verticales (selon  $v$ ).

Les appuis sont supposés infiniment rigides, donc les déplacements aux droites des appuis sont nuls ( $U_g = U_d = 0$ ).

Les équations (4) (quatre par plan) permettent d'écrire les flèches en fonction des efforts imposés  $\underline{P}_i$  :

$$f_{X_i} = c_{ij} P_{X_j}; f_{Y_i} = c_{ij} P_{Y_j} \quad (7)$$

Les indices  $X$  et  $Y$  indiquent les composantes des vecteurs selon les axes  $X$  et  $Y$  respectivement. La convention de l'indice muet est utilisée.

D'après les équations (3), les rotations des sections droites sont linéaires par rapport aux efforts imposés  $\underline{P}_i$  :

$$\Omega_{X_i} = d_{ij} P_{X_j}; \Omega_{Y_i} = d_{ij} P_{Y_j} \quad (8)$$

Les appuis étant infiniment rigides (donc  $\underline{U} = \underline{0}$ ), l'équation (6) devient :

$$\underline{A} \underline{R} + \underline{C} \underline{P} = \underline{0} \text{ donc } \underline{R} = -\underline{A}^{-1} \underline{C} \underline{P}$$

Les réactions sont donc linéaires par rapport aux efforts imposés  $\underline{P}_i$  :

$$R_{X_i} = e_{ij} P_{X_j}; R_{Y_i} = e_{ij} P_{Y_j} \quad (9)$$

Dans le cas où les tronçons ont les mêmes longueurs et les mêmes inerties les matrices  $c$ ,  $d$  et  $e$  sont les suivantes :

$$c = \left( \frac{l^3}{EI} \right) \begin{bmatrix} \frac{313}{21504} & \frac{-33}{7168} & \frac{9}{7168} & \frac{-3}{7168} \\ \frac{-33}{7168} & \frac{241}{21504} & \frac{-27}{7168} & \frac{9}{7168} \\ \frac{9}{7168} & \frac{-27}{7168} & \frac{241}{21504} & \frac{-33}{7168} \\ \frac{-33}{7168} & \frac{9}{7168} & \frac{-33}{7168} & \frac{313}{21504} \end{bmatrix}$$

$$d = \left( \frac{l^2}{EI} \right) \begin{bmatrix} \frac{41}{896} & \frac{-11}{896} & \frac{3}{896} & \frac{-1}{896} \\ \frac{-13}{448} & \frac{11}{448} & \frac{-3}{448} & \frac{1}{448} \\ \frac{1}{128} & \frac{-3}{128} & \frac{3}{128} & \frac{-1}{128} \\ \frac{-1}{448} & \frac{3}{448} & \frac{-11}{448} & \frac{13}{448} \\ \frac{1}{896} & \frac{-3}{896} & \frac{11}{896} & \frac{-41}{896} \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} \frac{-179}{448} & \frac{33}{448} & \frac{-9}{448} & \frac{3}{448} \\ \frac{-163}{224} & \frac{-127}{224} & \frac{27}{224} & \frac{-9}{224} \\ \frac{9}{56} & \frac{-17}{28} & \frac{-17}{28} & \frac{9}{56} \\ \frac{-9}{224} & \frac{27}{224} & \frac{-127}{224} & \frac{-163}{224} \\ \frac{3}{448} & \frac{-9}{448} & \frac{33}{448} & \frac{-179}{448} \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les longueurs et les inerties des tronçons sont différentes, ces matrices ont une forme plus compliquée.

### 3 Résultats et interprétations

Les caractéristiques géométriques du vilebrequin utilisés sont : diamètre tourillon (48 mm), largeur tourillon (27 mm), diamètre maneton (44 mm), largeur maneton (22,2 mm), entraxe maneton tourillon (40,25 mm), distance inter palier (85 mm). Le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau du vilebrequin sont respectivement 210 000 MPa et 0,3.

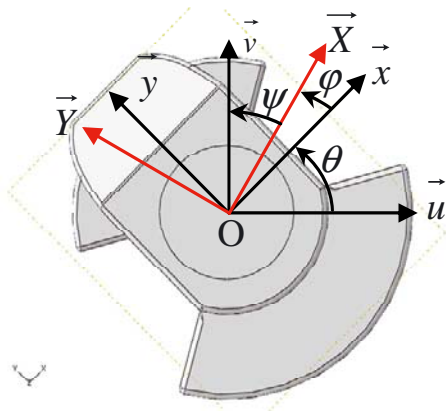


Fig. 4. Divers repères.

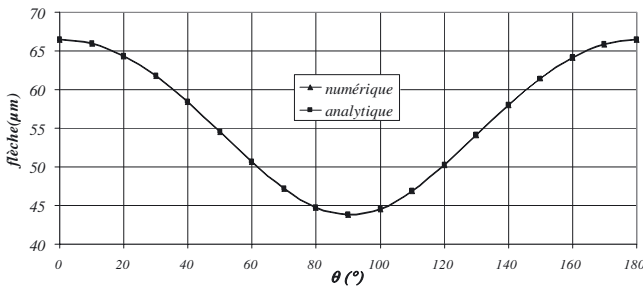


Fig. 5. Flèche du vilebrequin selon  $v$ .

### 3.1 Flexion 3 points

On utilise un recalage du modèle « EF-2A » avec le modèle « RdM-F3P » pour identifier les deux moments d’inertie (et donc les dimensions  $a$  et  $b$  de l’ellipse de la section droite). La figure 4 définit les axes et précise les notations utilisées. Le repère  $(O, x, y)$  est attaché au vilebrequin, le plan  $(y, z)$  est un plan de symétrie. On s’attend à ce que l’axe  $x$  soit un axe principal d’inertie de la section droite de la poutre droite équivalente. Le repère  $(O, X, Y)$  est le repère principal d’inertie de la section droite elliptique équivalente (à déterminer). Le repère  $(O, u, v)$  est le repère moteur.

Pour une valeur de  $F$  donnée et pour différentes valeurs de  $\theta$ , le calcul par éléments-finis permet d’obtenir les flèches  $f_v$ . La courbe  $f_v(\theta)$  est interpolée par l’équation (1). Les valeurs de  $J_X, J_Y$  et  $\varphi = \pi/2 - \theta - \psi$  sont celles minimisant l’écart entre la courbe  $f_v(\theta)$  obtenue par éléments-finis et celle obtenue par l’équation (1). L’angle  $\varphi$  est celui que fait le repère principal d’inertie avec le repère attaché au vilebrequin (Fig. 4).

La courbe de la figure 5 montre la qualité de l’interpolation. L’écart maximal observé est de l’ordre de 0,31 % :

Le tableau 1 donne les valeurs identifiées de  $J_X, J_Y, \varphi$  et les dimensions ( $a$  selon  $X$  et  $b$  selon  $Y$ ) de la section droite équivalente.

On vérifie bien que l’intersection du plan passant par les axes des tourillons et des manetons avec le plan de la section droite est un axe principal d’inertie. D’autre part, on constate une différence significative entre les moments

Tableau 1. Caractéristiques géométriques de la section équivalente.

$J_X$ (mm <sup>4</sup> )	$J_Y$ (mm <sup>4</sup> )	$\frac{J_{\max}}{J_{\min}}$	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$\varphi$
88 991	58 607	1,52	19,33	15,69	0

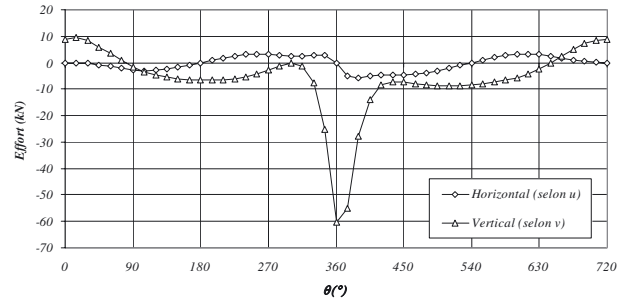


Fig. 6. Efforts de bielles exprimés dans le repère  $(O, u, v)$ .

d’inertie (un rapport d’excentricité  $\frac{J_{\max}}{J_{\min}} = 1,52$ ), donc une grande ellipticité du vilebrequin.

### 3.2 Poutre sur cinq appuis

On utilise maintenant un recalage du modèle « RdM-H5A » avec le modèle « EF-5AM » pour identifier les moments d’inertie des 4 tronçons. Les calculs éléments-finis sont faits pour différentes orientations du vilebrequin par rapport à la verticale. Les efforts appliqués sur les manetons sont les efforts relatifs à l’action des bielles aux cours du fonctionnement d’un moteur 4 cylindres en ligne (Fig. 6).

Les valeurs des moments d’inertie obtenus à partir du recalage des flèches aux milieux des tronçons données par le modèle « RdM-H5A » à celles données par éléments-finis sont illustrées dans le tableau 2 :

Il convient de noter que cette méthode donne un rapport d’excentricité  $\frac{J_{\max}}{J_{\min}}$  entre 1,04 et 1,09 alors que la méthode conventionnelle donne 1,52.

On représente dans le même graphe (Fig. 7), les modules des flèches aux milieux des manetons 1 et 2 données par :

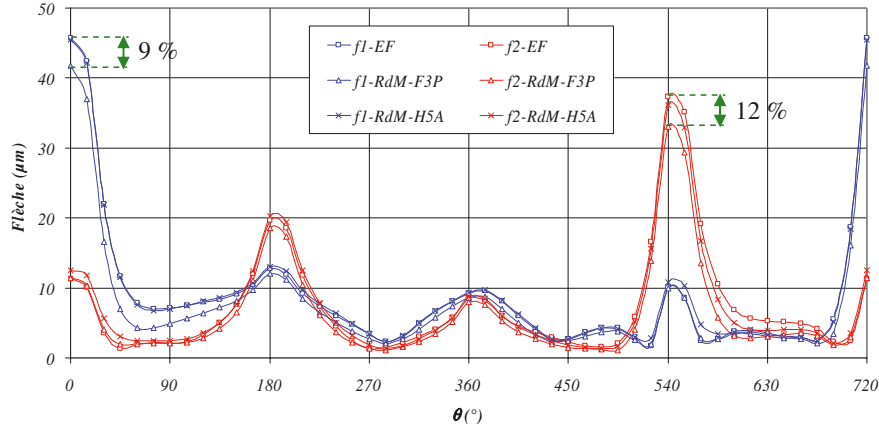
- le calcul éléments-finis ;
- le modèle « RdM-H5A » avec rigidité globale obtenue par la méthode conventionnelle (flexion trois points) ;
- le modèle « RdM-H5A » avec rigidités obtenues par le modèle de poutre sur cinq appuis.

Les rigidités obtenues par la méthode proposée donnent des résultats qui coïncident avec les résultats éléments-finis sur la plus grande partie du cycle moteur, alors que les rigidités obtenues par la méthode classique donnent des écarts importants (9 % pour  $f_1$  et 12 % pour  $f_2$  pour les chargements les plus importants). Ceci remet en cause la méthode classique.

La figure 8 présente les réactions aux droits des paliers données par le modèle éléments-finis « EF-5AM » d’une part et celui de type RdM « RdM-H5A » d’autre

**Tableau 2.** Caractéristiques géométriques des sections équivalentes.

	$I_X$ (mm <sup>4</sup> )	$I_Y$ (mm <sup>4</sup> )	$\frac{J_{\max}}{J_{\min}}$	$a$ (mm)	$b$ (mm)
Tronçon 1	49 468	53 971	1,09	15,67	16,37
Tronçon 2	55 768	53 634	1,04	16,40	16,09
Tronçon 3	56 087	53 351	1,05	16,45	16,04
Tronçon 4	49 394	53 973	1,09	15,66	16,37

**Fig. 7.** Les flèches en modules.

part. Pour des raisons de symétrie, seules les réactions sur les paliers 1, 2 et 3 sont représentées. Les rigidités utilisées sont celles identifiées par recalage des modèles « EF-5AM » et « RdM-H5A ». On obtient une parfaite coïncidence pour toutes les réactions et sur la totalité du cycle moteur.

La coïncidence n'est pas aussi parfaite pour les rotations des sections droites aux droits des paliers (Fig. 9) surtout pour les chargements les plus importants. Cela est a priori dû à la géométrie complexe du vilebrequin et à la différence de rayon entre les manetons et les tourillons.

## 4 Conclusions

Une méthode de détermination des rigidités en flexion, par tronçon, d'un vilebrequin modélisé par une poutre droite a été présentée et validée. Les résultats issus d'une simulation en élasticité par éléments-finis sur une géométrie réelle de vilebrequin mettent en évidence une amélioration significative de l'estimation des raideurs en flexion du vilebrequin grâce à cette nouvelle méthode (+8 % de gain de précision).

Les sollicitations utilisées pour déterminer ces rigidités sont celles réellement subies par le vilebrequin au cours de son fonctionnement (efforts des bielles) et non celles utilisées classiquement lors d'un essai en flexion trois points.

Cette méthode est simple de mise en œuvre et s'avère très utile dans les phases de pré dimensionnement pour rendre plus robuste la définition des cotes clés du vilebrequin qui sont, pour certaines d'entre elles, structurantes pour la conception du moteur.

## Annexe

### Matrices $\underline{A}_y$ et $\underline{A}_z$

$$\underline{A}_y = \begin{bmatrix} a_{y1} & b_{y1} & 0 & 0 & 0 \\ c_{y2} & a_{y2} & b_{y2} & 0 & 0 \\ d_y & c_{y3} & a_{y3} & b_{y3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_z = \begin{bmatrix} a_{z1} & b_{z1} & 0 & 0 & 0 \\ c_{z2} & a_{z2} & b_{z2} & 0 & 0 \\ d_z & c_{z3} & a_{z3} & b_{z3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -L_1 & -L_2 & -L_3 & -L_4 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = l_1 ; L_2 = l_1 + l_2 ; L_3 = l_1 + l_2 + l_3$$

$$L_4 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$$

$$a_i = \frac{l_i^2}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}^2 + 3l_i l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}$$

$$b_i = \frac{l_{i+1}^2}{6EJ_{i+1}}$$

$$c_i = \frac{l_{i+1}(l_{i+1} + 3l_i + 3l_{i-1})}{6EJ_{i+1}} + \frac{l_i(2l_i + 3l_{i-1})}{6EJ_i}$$

$$d = \frac{l_3(2l_3 + 3l_1 + 3l_2)}{6EI_3} + \frac{l_4(l_4 + 3l_1 + 3l_2 + 3l_3)}{6EI_4}$$

Les coefficients  $a_{yi}$ ,  $a_{zi}$ ,  $b_{yi}$ ,  $b_{zi}$ ,  $c_{yi}$ ,  $c_{zi}$ ,  $d_y$  et  $d_z$  s'obtiennent à partir des coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et  $d$  en remplaçant  $I_i$  par  $I_{Yi}$  ou  $I_{Zi}$ .

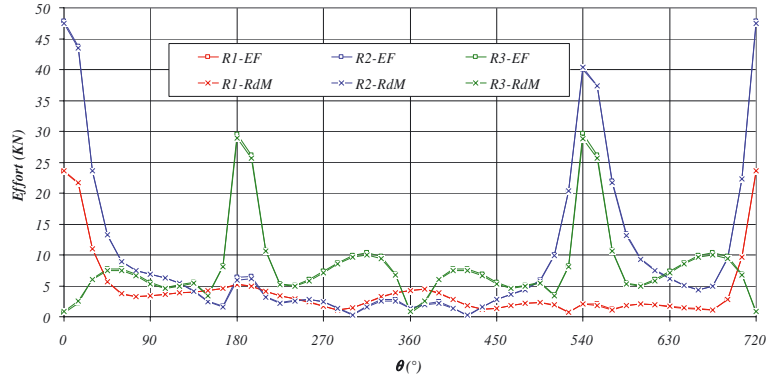


Fig. 8. Qualité de l'identification des réactions en modules.

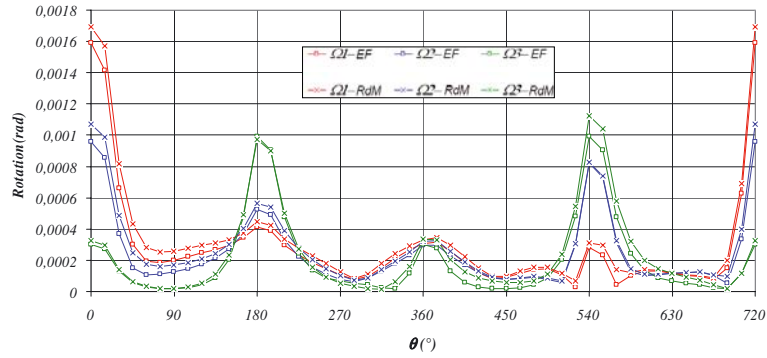


Fig. 9. Qualité de l'identification des réactions en modules.

### Matrices $\underline{C}_y$ et $\underline{C}_z$

$$\underline{C}_y = \begin{bmatrix} e_{y1} & f_{y1} & 0 & 0 \\ g_{y2} & e_{y2} & f_{y2} & 0 \\ h_y & g_{y3} & e_{y3} & f_{y3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_z = \begin{bmatrix} e_{z1} & f_{z1} & 0 & 0 \\ g_{z2} & e_{z2} & f_{z2} & 0 \\ h_z & g_{z3} & e_{z3} & f_{z3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -M_1 & -M_2 & -M_3 & -M_4 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = 1/2l_1M_2 = l_1 + 1/2l_2$$

$$M_3 = l_1 + l_2 + 1/2l_3M_3 = l_1 + l_2 + l_3 + 1/2l_4$$

$$e_i = \frac{5l_i^2}{48EJ_i} + \frac{2l_{i+1}^2 + 3l_i l_{i+1}}{12EJ_{i+1}}$$

$$g_i = \frac{l_{i+1}(2l_{i+1} + 6l_i + 3l_{i-1})}{12EJ_{i+1}} + \frac{l_i(4l_i + 3l_{i-1})}{12EJ_i}$$

$$f_i = \frac{l_{i+1}^2}{48EJ_{i+1}}$$

$$h = \frac{l_3(4l_3 + 3l_1 + 6l_2)}{12EJ_3} + \frac{l_4(2l_4 + 3l_1 + 6l_2 + 6l_3)}{12EJ_4}$$

Les coefficients  $e_{yi}$ ,  $e_{zi}$ ,  $f_{yi}$ ,  $f_{zi}$ ,  $g_{yi}$ ,  $g_{zi}$ ,  $h_y$  et  $h_z$  s'obtiennent à partir des coefficients  $e_i$ ,  $f_i$ ,  $g_i$  et  $h$  en remplaçant  $I_i$  par  $I_{Yi}$  ou  $I_{Zi}$ .

### Matrice $\underline{B}$ :

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_1} & \frac{l_1+l_2}{l_1l_2} & -\frac{1}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{l_2+l_3}{l_2l_3} & -\frac{1}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l_3} & \frac{l_3+l_4}{l_3l_4} & -\frac{1}{l_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Références

- [1] S. Vijayaraja, S. Vijayaragavan, Finite element analysis of critical components of the 2.6L gasoline engine, Americas HyperWorks Technology Conference HTC08, USA, 2008
- [2] W. Gross, A.W. Hussmann, Forces in the main bearings of multicylinder engines, SAE, 1966, p. 660756
- [3] I. Piraner, C. Pflueger, O. Bouthier, Cummins crankshaft and bearing analysis process, North American MDI User Conference, 2002
- [4] B. Bellakhdhar, C. Bouraoui, A. Dogui, Analyse statique d'un arbre sur cinq appuis élastiques, désalignés et avec jeux, COTUME'2008, Tunisie, 2008, pp. 103–104
- [5] Q. Leclere, Étude et développement de la mesure indirecte d'effort : Application à l'identification des sources internes d'un moteur Diesel, Thèse, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2003
- [6] F.V. Tinaut, A. Melgar, B. Gimenez, L. Fernandez, H. Huidobro, A method to determine the two components of the crankshaft load on a bearing cap in firing engines, S.A.E. Technical paper series, 2000, No. 2000-01-1340