

Exploitation des études de capabilité dans le calcul statistique des tolérances géométriques de localisation

ANTOINE S. TAHAN ET SYLVAIN LÉVESQUE^a

Département de Génie Mécanique, École de Technologie Supérieure, 1100 Notre-Dame Ouest, Québec, H3C 1K3, Canada

Reçu le 17 décembre 2009, accepté le 2 septembre 2011

Résumé – L'article propose une méthodologie pour exploiter les mesures de capabilité des procédés de fabrication dans le calcul des tolérances de localisation d'un ensemble d'éléments géométriques selon les standards ISO 1101 et ASME Y14.5 avec une approche statistique. Le nombre d'éléments géométriques étudiés, les erreurs systématique et aléatoire du procédé de fabrication seront retenues et incluses dans l'approche. Un modèle mathématique explicite est développé dans le but d'identifier les fonctions de distribution statistique pour différents types de tolérances de localisation. À partir de ces distributions, nous présentons une méthodologie servant à estimer les valeurs des tolérances qui permettent de rencontrer un seuil de conformité préétabli, et vice versa. L'article présente également une série d'abaques permettant un usage industriel simple et commode. Plusieurs exemples de calculs sont illustrés et un cas d'étude y est présenté.

Mots clés : Tolérance géométrique / tolérance statistique / tolérancement probabiliste / tolérance de localisation / tolérance de position / indice de capabilité

Abstract – **Exploiting the process capability in the statistical estimation of the tolerance of location.** This paper proposes a new methodology to exploit the capability of manufacturing processes in the statistical calculation of the tolerance of localization of a set of features according to the standards ISO 1101 and ASME Y14.5. The number of features that form the pattern studied, the systematic and random errors in the manufacturing process will all be retained and included in the approach. An explicit mathematical model is developed to identify the statistical distribution functions for different types of localization tolerances. From these distributions, we present a methodology to estimate the values of tolerance that can meet a compliance threshold for a pre-established value, and vice versa. The article also presents a series of charts that are usable in an industrial context. Many examples are illustrated and a case study is presented.

Key words: Geometric tolerance / statistical tolerancing / probabilistic tolerancing / localization tolerance / position tolerance / capability study

1 Introduction

Dans un contexte de mondialisation et de fabrication concurrentielle, les manufacturiers centralisent leurs efforts sur l'optimisation des coûts de fabrication tout en garantissant les performances des produits et l'interchangeabilité de leurs composantes, le but étant d'offrir non seulement un produit de qualité mais aussi un assemblage rapide et un service de réparation ou de remplacement efficace. La justesse et la répétitivité des machines-outils et des procédés de découpage actuellement utilisés dans

l'industrie sont donc primordiales. Des outils et des méthodologies comme le contrôle statistique des processus CSP, la cotation fonctionnelle et la spécification géométrique des produits [1, 2], le tolérancement statistique (ou probabiliste) et les indices de capabilité [3] ont été mis sur pied afin de mieux maîtriser les variations, faciliter la tâche des concepteurs, assurer un meilleur contrôle et, par conséquent, obtenir de meilleures performances.

Avec un resserrement constant des tolérances allouées dans la fabrication de produits, les designers doivent avoir de meilleurs indicateurs pour bien établir, du premier coup, les paramètres de conception par rapport

^a Auteur pour correspondance :
sylvain.levesque@etsmtl.ca

Nomenclature

ASME	American Society of Mechanical Engineering
A, B, C	Système référentiel
CDF	Fonction de répartition (<i>Cumulative Distribution Function</i>)
$C_p, C_{pk}, C_c, C_{pm}, \dots$	Indices de capabilité [ISO 2006]
f, F	
g, G	
h, H	Fonctions densité (minuscule) et de répartition (majuscule)
k, K	
ISO	International Standards Organisation
n	Nombre d'éléments
PDF	Fonction de densité de probabilité (<i>Probability Density Function</i>)
P_p, P_{pk}, \dots	Indices de performance
R_i	Distance euclidienne entre le centre de l'élément i et sa position nominale
r_i	Distance euclidienne entre le centre de l'élément i et le centre commun à leur position relative
X_i, Y_i	Coordonnées de la position nominale de l'élément i
x_i, y_i	Coordonnées de la position réelle de l'élément i
$()_{\text{relative}}$	Indice indiquant la position relative des n éléments (cette tolérance est désignée par [ASME Y14.5] : <i>Feature Relation Tolerance Zone Framework</i>)
$()_{\text{absolue}}$	Indice indiquant la position absolue des n éléments (cette tolérance est désignée par [ASME Y14.5] : <i>Pattern Location Tolerance Zone Framework</i>)
$\delta_{x_i}, \delta_{y_i}$	Déviations spatiales réelles de l'élément i
μ_{x_i}, μ_{y_i}	Erreurs systématiques estimées de l'élément i
σ	Écart type estimé d'une variable aléatoire

aux variables du procédé utilisé [4]. Pour répondre à cette demande, nombreuses recherches ont démontré de nouvelles méthodes très efficaces pour modéliser les variations provenant des différentes étapes de fabrication d'une pièce [5, 6], et pour surveiller et contrôler statistiquement un procédé possédant plusieurs variables [7, 8].

L'identification d'un indice de capabilité d'un procédé multi-variables a fait l'objet d'une multitude d'études et d'analyses [9–11]. Toutes ces méthodes partagent le même fondement théorique. Une fois les domaines de conformité et de non-conformité (ou de fonctionnalité et de défaillance) établis, des indices de capabilité à variables multiples peuvent être obtenus en tenant compte du comportement statistique de l'ensemble des variables du procédé [12]. Plus récemment, une nouvelle approche a été proposée par Mannar et al. pour obtenir les ajustements optimaux d'un procédé pour que le produit respecte les critères de qualité [13]. Presque dans tous ces cas, le domaine de conformité est préétabli d'avance et il est limité par des valeurs constantes (tolérances constantes).

Bien que l'estimation des capabilités des procédés semble aujourd'hui être un outil relativement mature et bien implanté au niveau industriel [14–16], son exploitation dans le calcul des tolérances de localisation demeure un aspect problématique pour beaucoup de concepteurs [17, 18]. Spécialement, lorsqu'on aborde le cas d'une tolérance de position composée avec une zone de tolérance circulaire appliquée sur un ensemble d'éléments tel que proposé par Bothe [19] et Xi et al. [20], les aspects probabilistes rendent l'applicabilité d'une telle approche sensiblement ardue pour les concepteurs. Même si les standards ISO [1] et ASME Y14.5 [2] dédient beaucoup d'exemples pour illustrer l'interprétation de chacune des tolérances géométriques, le calcul des tolérances de

position des éléments reste tout de même relativement complexe et confus [21]. Plusieurs approximations sont à l'origine d'erreurs qui se traduisent souvent par une sur-qualité, par exemple, l'utilisation de la limite de la condition au maximum de matière pour établir les écarts permis entre les éléments des attaches (boulons, rivets, etc.) et les trous d'assemblage. Cette approche limite, bien que simple d'application et assurant la condition d'assemblage, considère que tous les éléments se trouvent au maximum de matière simultanément, ce qui est pratiquement très peu probable. Tel que démontré par Shan et al. [22], contrairement à l'approche statistique l'approche « Worst Case » se traduit souvent par des zones de tolérances réduites et, par conséquent, par une augmentation des coûts de fabrication.

Une autre des principales sources de cette confusion est la notion de complexité. Par le terme « complexité », nous désignons les nombres d'éléments géométriques primitifs (*features*) qui sont inclus dans la tolérance de position, par exemple, un groupe de n trous employé pour fixer deux pièces ensemble. Il est facile d'admettre que sur une même machine, il est plus facile de respecter les requis dimensionnels d'une pièce avec deux trous que sur une pièce avec dix trous. En d'autres termes, plus la composante est complexe, plus les chances d'obtenir la même précision s'amointrissent. Cette notion de complexité n'est malheureusement pas retenue, ou pas encore clairement identifiée dans les études de capabilité « opérationnelles » de l'industrie. Dans la majorité des cas, l'industriel sera tenté d'exploiter numériquement un ensemble d'essais significatifs pour l'estimation des capabilités réelles d'une machine. Ces estimations sont généralement effectuées sur des pièces typiques et les calculs sont relativement simples. Selon le standard ISO [3],

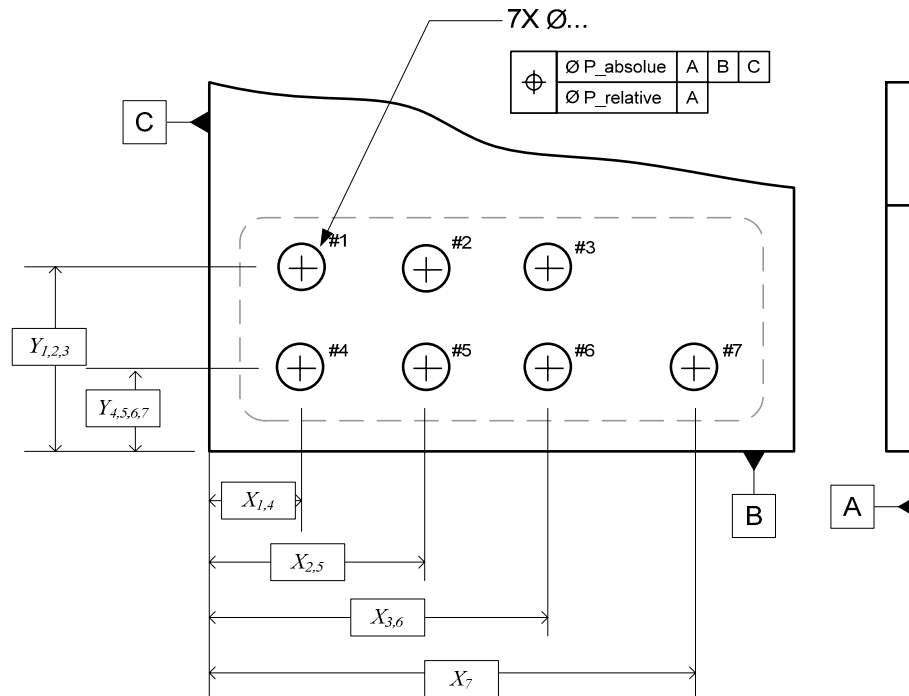


Fig. 1. Exemple d'une tolérance de position composée appliqué sur 7 éléments.

les estimations de l'espérance et de la variance sont traduites par des capacités (C_p , C_{pk} , ...) ou des performances (P_p , P_{pk} , ...). Or le problème est justement la notion de « pièce typique ». Par exemple, si nous évaluons la capacité d'une machine à reproduire la localisation diamétrale dans l'espace d'un trou de fixation, comment peut-on extrapoler ces résultats pour prédire le comportement sur n trous? En d'autres termes, quelle est la méthodologie permettant aux concepteurs d'effectuer une conception selon les capacités réelles d'un procédé qui tient compte à la fois de la complexité des composantes mécaniques étudiées et des performances réelles d'un procédé en contrôle statistique? À l'inverse, cette méthodologie ne devrait-elle pas aussi permettre d'évaluer le taux de rejet en fonction de ces deux derniers éléments?

Le présent article aborde la problématique de la tolérance de position d'un ensemble d'éléments géométriques en fonction de la capacité d'un procédé existant. Plus spécifiquement, nous étudions le cas des tolérances géométriques de position appliquées sur un ensemble de trous dans une composante mécanique. Pour chaque élément, nous considérons une exigence fonctionnelle constante (tolérance de localisation exprimée par une zone diamétrale ou radiale) telle que définie dans ISO 1101. À partir des notions de base de calcul des tolérances de position proposées par les normes du domaine (ISO et ASME), deux modèles mathématiques explicites sont élaborés afin de permettre le calcul statistique des tolérances en fonction du type de localisation (relative ou absolue selon les degrés de libertés bloqués), du nombre d'éléments composant l'ensemble étudié

(complexité), de l'erreur systématique (incluant celle de la mise en route due à l'outillage) et du niveau de variation inhérente au procédé. Des exemples de calculs seront proposés. Finalement, l'étude d'un cas réel illustre la méthodologie proposée et démontre aussi l'applicabilité de la méthodologie à estimer le taux de rejet d'un procédé en fonction de sa capacité réelle et de la complexité de la pièce fabriquée.

2 Modèle mathématique pour une tolérance avec une zone de tolérance cylindrique

Nous considérons le cas qui est l'identification de la capacité d'une machine à fabriquer n éléments cylindriques avec des exigences spécifiques pour leurs localisations. Nous étudions uniquement le problème de la localisation d'un point de vue probabiliste; la capacité de la machine à obtenir des diamètres à l'intérieur des spécifications ne fait pas partie de la présente étude. Nous considérons donc le problème comme indépendant de la condition de matière comme c'est le cas lorsqu'une condition fonctionnelle de précision (localisation ou alignement) est requise. La notion de la condition au maximum de matière (ou au minimum) est, par définition, une condition limite et par conséquent ne s'appliquera pas dans l'approche proposée. Toutefois, l'analyse statistique comparée avec ou sans modificateur reste un problème ouvert. Pour les règles d'interprétation de la tolérance de position, nous référons le lecteur aux standards ISO 1101 [1] et ASME Y14.5 [2].

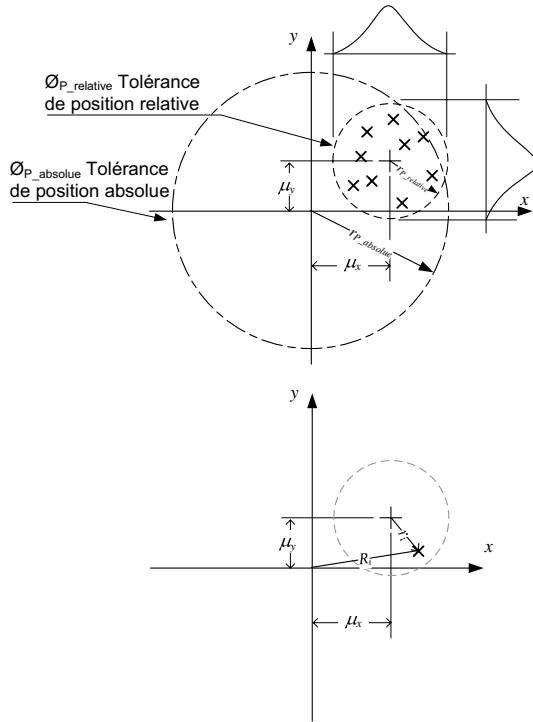


Fig. 2. Nomenclature des variables utilisées.

La figure 1 illustre un exemple d'une tolérance de position composée (*Composite Positional Tolerancing*). La position nominale de chaque élément i est définie par des coordonnées nominales (X_i, Y_i) par rapport au système référentiel ABC . On considère que la position réelle d'un trou est définie par le centre réel (x_i, y_i) de la contrepartie géométrique (par exemple, la position du plus grand cercle inscrit dans le trou, position simulée). La première tolérance de position dite « absolue » localise l'ensemble des éléments par rapport au repère (xyz) créé par le système ABC . Nous désignons cette tolérance par le terme $P_absolue$ (le standard Y14.5 emploie l'expression PLTZF : *Pattern-Locating Tolerance Zone Framework*). La seconde tolérance, ayant une valeur plus petite et plus de degrés de liberté (puisque non contrainte par rapport aux référentiels B et C), contrôle la position relative entre les n éléments pour assurer la condition d'assemblage. Nous la désignons par le terme $P_relative$ (le standard emploie l'expression FRTZF : *Feature-Relating Tolerance Zone Framework*). La figure 2 sur laquelle les symboles (+) représentent la déviation selon les axes X et Y des trous par rapport à leur position théorique, illustre les deux types de tolérance.

Pour aboutir à un modèle mathématique explicite, voici les hypothèses posées :

- **Hypothèse 1** : Nous examinons le problème uniquement en 2D. En d'autres termes, nous considérons que l'erreur d'orientation est négligeable, ce qui nous amène à supposer que le problème de localisation se déroule dans un plan désigné par XY et perpendiculaire à l'axe de rotation de l'outil de coupe. Le centre d'un trou sera donc confondu à l'axe de celui-ci.

On définit le centre par le centre de la contrepartie géométrique. Par exemple, dans le cas d'un trou, nous considérons le centre du plus grand cercle parfait et inscrit dans l'élément tel que défini dans [1, 2]. Pour le cas tridimensionnel, l'analyse mathématique que nous effectuerions demeurerait valable en considérant, non pas les déviations ($\delta_x, \delta_y, \delta_z$) mais plutôt les déviations (δ_u, δ_v) selon le repère ($\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$), \mathbf{w} étant le vecteur normal à surface nominale [17]. Pour plus de détails, nous référons le lecteur à la norme des tolérances vectorielles ASME Y14.5.1-1994 [2].

- **Hypothèse 2** : Dans le but de simplifier l'analyse mathématique, nous considérons que les niveaux des variations dans les axes X et Y comme semblables ($\sigma_x \approx \sigma_y$).
- **Hypothèse 3** : Nous considérons que les comportements des déviations selon les axes X et Y de la machine comme non corrélés (ou d'un niveau de corrélation non significatif). Cette hypothèse permettra une formulation mathématique plus simple. La validité des résultats en dépend et une analyse préliminaire des déviations est fortement suggérée pour valider cette hypothèse. Certains travaux ont démontré que dans certains cas, le niveau de corrélation entre les axes ne peut être négligé, en fonction de la géométrie de la machine et l'architecture des contrôleurs des axes (Tichadou et al. [27]). Néanmoins, nous considérons dans cet article que le niveau de corrélation est négligeable.
- **Hypothèse 4** : Nous considérons que la déviation de chaque élément par rapport à sa position nominale est décrite par une composante systématique qui sera estimée à partir des moyennes (μ_x, μ_y) et une déviation aléatoire (δ_x, δ_y) qui représente les variations inhérentes du procédé :

$$\begin{aligned} x_i - X_i &= \mu_x + \delta_{x_i} \\ y_i - Y_i &= \mu_y + \delta_{y_i} \end{aligned} \quad (1)$$

La partie systématique peut être causée par une erreur dans le montage (mise en route), un biais dans le contrôleur de la machine, un défaut du gabarit de positionnement de la pièce ou toute autre source qui génère une déviation constante (par exemple, une erreur due à une température). La composante aléatoire est généralement due aux variations indissociables du procédé : jeu dans les mécanismes, usure, incertitude de mesure, etc.

- **Hypothèse 5** : Comme (δ_x, δ_y) sont les résultantes de plusieurs types d'erreurs non corrélées entre elles (erreurs géométriques de la machine, usure des outils, usure dans les joints cinématiques, etc.), en accord avec le théorème central limite [23, 24], nous les considérons comme des variables gaussiennes :

$$\begin{aligned} \delta_x &\sim N(0, \sigma_x) \\ \delta_y &\sim N(0, \sigma_y) \end{aligned} \quad (2)$$

Pour estimer la valeur de σ , et en fonction de la stabilité (ou la non stabilité) du procédé, nous pouvons

utiliser une carte de contrôle « Moyenne – Étendue », ou tout autre estimateur cohérent et consistant [15]. Également, pour simplifier l'analyse, nous ne retenons aucune différence entre l'étude à long terme (LT : *Long Term*) ou l'étude à court terme (ST : *Short Term*) [25]. Toutefois, la méthodologie que nous proposerons demeure valable pour n'importe quel estimateur de σ , il suffira au concepteur de substituer l'estimateur σ adéquat.

À partir de ces hypothèses et pour modéliser les déviations radiales, nous désignons par R_i la distance euclidienne entre le point qui représente les déviations par rapport aux coordonnées nominales $(x_i - X_i, y_i - Y_i)$ et l'origine créée par le système référentiel ABC . L'erreur de position d'un ensemble de n éléments se calcule en terme de déviation radiale (ou diamétrale). Dans le cas de la tolérance absolue (P_{absolue}), l'équation (3) permet de trouver la déviation radiale maximale (Fig. 2) :

$$r_{P_{\text{absolue}}} = \max_{i=1, \dots, n} (R_i) \quad (3)$$

avec,

$$R_i = \sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2} \quad (4)$$

Le calcul des tolérances relatives (P_{relative}) est plus complexe. Rigoureusement, il faut trouver le plus petit cercle $c(x_c, y_c)$ qui circonscrit l'ensemble des déviations $(x_i - X_i, y_i - Y_i)$ pour les n éléments (voir Fig. 2). Selon les standards ISO 1101 [1] et ASME Y14.5 [2], la valeur exacte de la tolérance relative est obtenue en minimisant la plus grande déviation du centre réel d'un trou à son centre théorique sur un gabarit nominal. En d'autres termes, pour calculer la tolérance relative, il faut trouver :

$$r_{P_{\text{relative}}} = \min_c (r) \quad (5)$$

Comme approximation, nous pouvons confondre le cercle représentant la tolérance de position relative $c(x_{P_{\text{relative}}}, y_{P_{\text{relative}}})$ avec le centre du cercle obtenu par la méthode des moindres-carrés (Éq. (6)). Cette hypothèse, très commode pour obtenir une formulation mathématique explicite, introduit un petit biais positif qui protège le fournisseur (surestimation de l'erreur de la machine). Ce biais décroît avec l'augmentation du nombre d'éléments n . Tenant compte de cette approximation, les coordonnées du centre du cercle de la tolérance sont définis par :

$$\begin{aligned} x_{P_{\text{relative}}} &\approx \mu_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - X_i) \\ y_{P_{\text{relative}}} &\approx \mu_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i) \end{aligned} \quad (6)$$

Par convention, nous désignerons donc $r_i = \sqrt{\delta_{x_i}^2 + \delta_{y_i}^2}$ comme la distance entre les points $(x_i - X_i, y_i - Y_i)$ et le nouveau centre $c(\mu_x, \mu_y)$, donc :

$$r_{P_{\text{relative}}} \approx \max_{c(\mu_x, \mu_y)} (r_i) \quad (7)$$

2.1 Analyse de la capabilité de la tolérance relative

Rappelons que la tolérance relative (P_{relative}) exprime les déviations spatiales entre un ensemble d'éléments. La capabilité de cette tolérance indique, selon un niveau de qualité préétabli, la valeur de $r_{P_{\text{relative}}}$ en mm. Communément, elle est désignée par « capabilité potentielle » d'un procédé car elle exprime uniquement les variations inhérentes de cette dernière. En d'autres termes, dans l'absence de toute erreur systématique, cette capabilité exprime ce que le procédé peut produire au mieux. Dans ce cas, la fonction de densité PDF de la déviation radiale r_i est du type *Rayleigh* [24] :

$$f(r_i; \sigma) = \frac{r_i}{\sigma^2} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}} \quad r_i \geq 0, \sigma > 0 \quad (8)$$

Et sa fonction de répartition (CDF) est :

$$F(r_i; \sigma) = \int_0^r \frac{w}{\sigma^2} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw = 1 - e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}} \quad r_i \geq 0, \sigma > 0 \quad (9)$$

La distribution de la variable $r_{P_{\text{relative}}}$ (Éq. (7)) peut être obtenue de la valeur maximale (rang n) d'un ensemble de variables aléatoires (r_1, \dots, r_n) avec $n \geq 2$.

$$r_{P_{\text{relative}}} = \max_{i=1, \dots, n} (r_1, \dots, r_n) \quad n \geq 2 \quad (10)$$

À partir du théorème de la statistique d'ordre [23], nous pouvons déduire les fonctions PDF $g(r; (\sigma, n))$ et CDF $G(r; (\sigma, n))$ de la nouvelle variable aléatoire $r_{P_{\text{relative}}}$. Leur domaine d'applicabilité est $r \geq 0, \sigma > 0, n \geq 2$. Le développement mathématique qui s'y rattache se trouve à l'Annexe I. En figure 3, nous avons tracé le comportement de $g(r; (1, n))$ et $G(r; (1, n))$ en fonction de n pour une variance unitaire. On constate un comportement quasi asymptotique au-delà d'un seuil $n \geq 15$. En effet, pour des distributions avec $n \geq 15$, le nombre d'éléments n'influence que marginalement les résultats. Par contre, pour $n \leq 10$, il existe des différences notables.

$$g(r; (\sigma, n)) = n \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \left[1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right]^{n-1} \quad (11)$$

$$G(r; (\sigma, n)) = \int_0^r g(w) dw = \left[1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right]^n \quad (12)$$

Pour définir la capabilité (ou la performance) d'une distribution non symétrique jumelée à une spécification unilatérale, nous utilisons la formule proposée par Bothe [19], (Éq. (13)). Le terme USL désigne la limite de spécification tolérée et $r_{x\%}$ est le percentile correspondant à un niveau $x\%$ de conformité (voir Fig. 4).

$$\widehat{P}_{\text{pk}}, \widehat{C}_{\text{pk}} = \frac{USL - \widehat{r}_{50\%}}{\widehat{r}_{99,865\%} - \widehat{r}_{50\%}} \quad (13)$$

Pour calculer les percentiles $r_{50\%}$, $r_{99,865\%}$ ou d'autres, nous pouvons reformuler la capabilité (ou la performance)

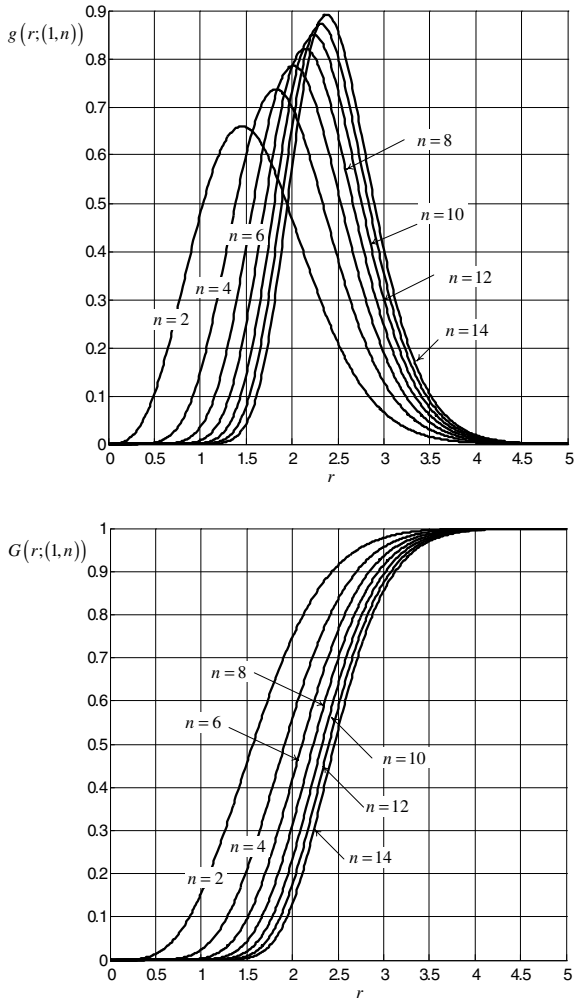


Fig. 3. Fonction de densité $g(r; (1, n))$ et fonction de répartition $G(r; (1, n))$ de la tolérance relative.

du procédé à rencontrer le seuil de $x\%$ de conformité à partir de l'équation (14).

$$r_{x\%} = \sigma \sqrt{-2 \ln \left(1 - \left(\frac{x}{100} \right)^{\frac{1}{n}} \right)} \quad (14)$$

Finalement, la figure 5 illustre le comportement des percentiles standards $r_{50\%}$, $r_{99,865\%}$ et $r_{3,4 \text{ ppm}}$ et ce, pour une variance unitaire.

2.2 Analyse de capacité de la tolérance de position absolue

Comme mentionné précédemment, cette tolérance tient compte des erreurs de nature systématique et contrôle la position d'un ensemble d'éléments par rapport au système référentiel. La distribution de $r_{P_absolue}$ peut être obtenue également à partir du théorème des statistiques d'ordre [23]. Il s'agit dans ce cas, de trouver la valeur maximale d'un ensemble des variables aléatoires R_i (voir Éq. (3)). La fonction de densité de $r_{P_absolue}$

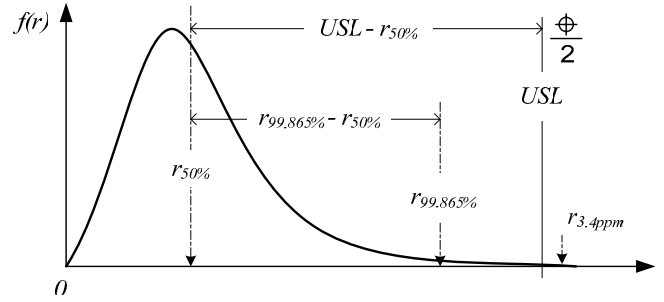


Fig. 4. Définition de la capacité (ou performance) dans le cas d'une distribution non normale avec une spécification supérieure unilatérale.

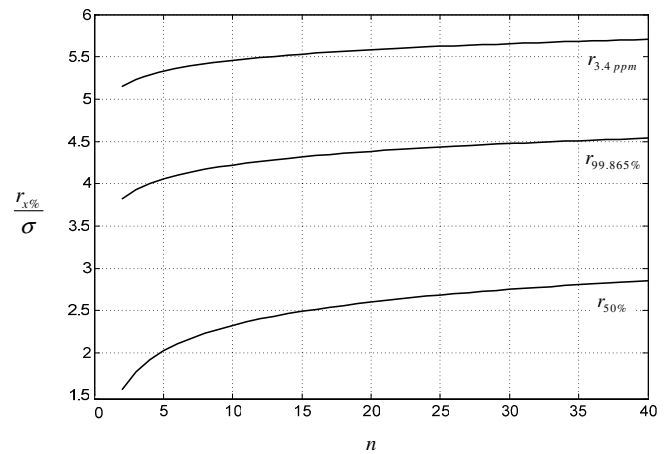


Fig. 5. Percentiles $r_{50\%}$, $r_{99,865\%}$ et $r_{3,4 \text{ ppm}}$ de la tolérance P_{relative} ($\sigma = 1$).

est définie comme $h(r; (\sigma, \mu, n))$ et sa fonction de répartition comme $H(r; (\sigma, \mu, n))$. Nous référons le lecteur à l'Annexe II pour le développement mathématique complet.

Les expressions analytiques explicites étant très difficiles à obtenir pour $r \geq 0$, $\sigma > 0$, $\mu \geq 0$ $n \geq 2$, les fonctions h et H ont été évaluées numériquement et sont proposés aux usagers sous la forme d'abaques pour différentes valeurs typiques des percentiles.

$$h(r; (\sigma, \mu, n)) = n \frac{r}{\sigma^2} I_0 \left(\frac{r\mu}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{R_i^2 + \mu^2}{2\sigma^2}} \times [K(r; (\sigma, \mu, n))]^{n-1} \quad (15)$$

$$H(r; (\sigma, \mu, n)) = \int_0^r h(w; (\sigma, \mu, n)) dw \quad (16)$$

Pour définir la capacité de $r_{P_absolue}$, il faut trouver les percentiles $r_{x\%}$ à partir de l'équation (16). Pour ce cas, la capacité (ou la performance) du procédé à rencontrer le seuil de $x\%$ de conformité sera donnée par :

$$r_{x\%}(\sigma, \mu, n) = H^{-1}(x\%; (\sigma, \mu, n)) \quad (17)$$

Les tableaux 1–3 illustrent le comportement de $r_{50\%}$, $r_{99,865\%}$ et $r_{3,4 \text{ ppm}}$ pour une variance unitaire, et en fonction du nombre des éléments n et de l'erreur systématique μ .

Tableau 1. Percentile $r_{50\%}/\sigma$ d'une tolérance P_{absolue} en fonction de n et μ .

n	μ/σ							
	0	0,2	0,5	1	2,5	5	10	15
2	1,56713	1,58278	1,66417	1,93722	3,22436	5,63961	10,59360	15,57768
3	1,77675	1,79447	1,88558	2,18106	3,49107	5,91170	10,86735	15,85177
4	1,91739	1,93649	2,03392	2,34247	3,66533	6,08911	11,04578	16,03041
6	2,10498	2,12591	2,23150	2,55567	3,89300	6,32052	11,27844	16,26335
8	2,23113	2,25327	2,36417	2,69779	4,04349	6,47328	11,43199	16,41707
10	2,32532	2,34838	2,46315	2,80332	4,15467	6,58605	11,54533	16,53053
12	2,40007	2,42384	2,54163	2,88672	4,24224	6,67482	11,63453	16,61983
15	2,48901	2,51364	2,63494	2,98557	4,34574	6,77969	11,73989	16,72530
20	2,59982	2,62551	2,75110	3,10820	4,47370	6,90926	11,87006	16,85561
25	2,68299	2,70948	2,8382	3,19987	4,56909	7,00580	11,96704	16,95269
30	2,74927	2,77639	2,90757	3,27270	4,64473	7,08232	12,04389	17,02962

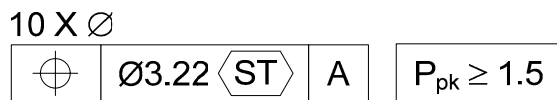
3 Études de cas

Voici deux études de cas démontrant l'applicabilité de la méthodologie développée.

3.1 Capabilité d'un gabarit de perçage

Un gabarit de perçage est employé pour percer un ensemble de 10 trous sur une structure du type mécano-soudée. La position du gabarit n'est pas critique. Par contre, la position relative entre les 10 trous est importante. Une étude de capabilité a été effectuée sur un échantillon de la production régulière assemblé sur ce gabarit. Un test d'adéquation à la loi normale nous a indiqué que le comportement était quasi normal (Anderson–Darling : 0,334 et P -value : 0,502). Le niveau des dispersions alors observé sur la position relative entre les trous est d'environ $\sigma = 0,31$ mm dans chaque axe. Nous considérons donc $\sigma_x = \sigma_y = 0,31$ mm et utiliserons un $P_{pk} = 1,5$.

À partir des équations (13) et (14), le concepteur peut estimer une tolérance qui sera respectée avec un niveau ne dépassant pas 3,4 ppm (capabilité *Six Sigma*[®] [25]), ce qui nous donne la valeur 1,61 mm pour le seuil radial $r_{3,4 \text{ ppm}}$. Cette valeur sera exprimée sous la forme d'une tolérance géométrique de localisation (le référentiel A étant la surface d'appui perpendiculaire à l'axe des trous) comme :



3.2 Capabilité d'un centre d'usinage

Dans cette étude, nous avons évalué les performances d'un centre d'usinage à cinq axes. Les étendues des déplacements de la broche selon les axes (x, y, z) sont respectivement de 4200 mm × 1100 mm × 1000 mm. Pour que l'identification des performances de la machine

soit statistiquement significative, nous avons utilisé une pièce typique avec des alésages positionnés dans la pièce de sorte que la machine sollicite ses cinq axes (X, Y, Z, A et B) selon les recommandations de l'ASME [26], le but étant de reproduire une estimation fiable de l'erreur de la machine. Quarante pièces ($m = 40$) ont été fabriquées avec le même programme et inspectées sur une machine de mesure par coordonnées ayant une répétitivité $\leq 0,006$ mm ($\pm 2\sigma$). Les résultats des mesures ont été traités pour identifier les estimateurs $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y$ et $\hat{\sigma}$. Le tableau 4 regroupe les principaux résultats (intervalle de confiance 95 %).

3.2.1 Cas 1

À partir de ces données, le concepteur peut prédire (selon la complexité des pièces) les tolérances de localisation d'une pièce qui sera fabriquée sur cette machine. Cela aura comme principal avantage d'adapter la valeur de la tolérance à la complexité de la pièce, et ainsi minimiser les risques de sur-qualité due à une tolérance trop sévère.

Nous traitons le cas d'une pièce avec un ensemble de $n = 7$ trous. La déviation radiale systématique (μ) est égale à $\sqrt{0,012^2 + (0)^2} = 0,012$ mm et le ratio $\mu/\sigma = 1,46$. Ceci nous permet à l'aide d'interpolations dans les abaques de calculer les tolérances de localisation pour un niveau de qualité 3,4 ppm. Pour la tolérance relative (P_{relative}), l'équation (14) nous permet de calculer $(r_{3,4 \text{ ppm}})_{\text{FRTZF}} = 5,3\sigma$, ce qui donne une tolérance relative égale à Ø0,08 mm pour un $P_{pk} = 1,5$.

Pour la tolérance absolue (P_{absolue}), la solution numérique de l'équation (17), ou une interpolation à partir des tableaux 1 et 3, nous permet de trouver dans ce cas : $(r_{3,4 \text{ ppm}})_{\text{FRTZF}} \approx 6,54\sigma$, ce qui donne une tolérance égale à Ø0,12 mm, encore une fois, pour un $P_{pk} = 1,5$.

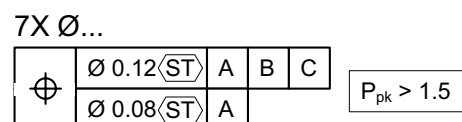


Tableau 2. Percentile $r_{99,865\%}/\sigma$ d'une tolérance P_{absolue} en fonction de n et μ .

n	μ/σ							
	0	0,2	0,5	1	2,5	5	10	15
2	3,82112	3,85818	4,02384	4,42923	5,83345	8,28221	13,24839	18,23524
3	3,92576	3,96377	4,1323	4,54046	5,94691	8,39652	13,36308	18,35003
4	3,99836	4,03702	4,20749	4,61747	6,02541	8,47560	13,44242	18,42944
6	4,0985	4,13805	4,31113	4,72353	6,13343	8,58440	13,55157	18,53867
8	4,16809	4,20826	4,38312	4,79712	6,20834	8,65983	13,62723	18,61440
10	4,22129	4,26193	4,43812	4,85330	6,26550	8,71738	13,68496	18,67218
12	4,26426	4,30528	4,48253	4,89865	6,31163	8,76381	13,73154	18,71879
15	4,31626	4,35775	4,53627	4,95349	6,36739	8,81994	13,78784	18,77514
20	4,38241	4,42447	4,60458	5,02317	6,4382	8,89122	13,85933	18,84669
25	4,43307	4,47553	4,65684	5,07645	6,49233	8,94569	13,91397	18,90137
30	4,47397	4,51683	4,69909	5,11950	6,53605	8,98970	13,95810	18,94553

Tableau 3. Percentile $r_{3,4 \text{ ppm}}/\sigma$ d'une tolérance P_{absolue} en fonction de n et μ .

n	μ/σ							
	0	0,2	0,5	1	2,5	5	10	15
2	5,15459	5,20326	5,39988	5,83165	7,25794	9,71570	14,68610	19,67408
3	5,23266	5,28198	5,48009	5,91295	7,34020	9,79839	14,76899	19,75704
4	5,28735	5,33712	5,53625	5,96986	7,39777	9,85625	14,82701	19,81508
6	5,36349	5,41389	5,61441	6,04903	7,47784	9,93672	14,90767	19,89591
8	5,41686	5,46770	5,66918	6,10449	7,53392	9,99307	14,96417	19,95234
10	5,45790	5,50908	5,71128	6,14711	7,57701	10,03637	15,00757	19,99578
12	5,49120	5,54265	5,74544	6,18169	7,61196	10,07149	15,04277	20,03100
15	5,53169	5,58347	5,78696	6,22371	7,65443	10,11416	15,08555	20,07381
20	5,58345	5,63566	5,84003	6,27741	7,70870	10,16817	15,14020	20,12849
25	5,62327	5,67580	5,88085	6,31870	7,75042	10,21056	15,18221	20,17036
30	5,65561	5,70839	5,91398	6,35221	7,78427	10,24461	15,21630	20,20464

Tableau 4. Estimateurs statistiques (étude de cas).

Estimateur	(mm)
$\hat{\mu}_x$	0,0120 \pm 0,0004
$\hat{\mu}_y$	0,0007 \pm 0,0004
$\hat{\sigma}$	0,0082 \pm 0,0012
Pearson correlation ρ_{xy}	0,010 (P -Value = 0,891)

3.2.2 Cas 2

Avec le même robot, on demande de prédire le pourcentage des pièces non conformes sur les opérations de perçage d'un ensemble de $n = 30$ si le concepteur a exigé une tolérance de $\emptyset 0,15$ mm.

30X \emptyset ...

\emptyset	$\emptyset 0.15$	A	B	C
-------------	------------------	---	---	---

Avec le ratio $\mu/\sigma = 1,46$, une tolérance $r_{P_{\text{absolue}}} = 0,075$ mm ($r/\sigma = 9,842$), une solution numérique de l'équation (17), $r_{x\%}(0,0082, 0,012, 30) = 0,075$ nous permet de trouver le seuil $x\%$ de conformités. Dans le cas étudié, nous trouvons $x\% = 99,23$ %. En utilisant la formule (13), cela indique donc un indice de capabilité $P_{pk} \approx 0,9$ pour le procédé envisagé envers la tolérance désirée.

4 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une méthodologie pour exploiter la capacité d'un procédé à respecter les tolérances géométriques de localisation en tenant compte de la complexité géométrique. Nous avons retenu dans le développement deux types de tolérancement : la tolérance absolue qui localise un élément par rapport à un système référentiel et la tolérance relative qui décrit l'erreur de localisation relative entre un ensemble d'éléments. Nous avons développé une formulation mathématique explicite qui permet le calcul des tolérances statistiques en fonction du type de localisation, le nombre d'éléments géométriques, l'erreur systématique du procédé et son niveau de variation inhérente. Des abaques adimensionnels ont ensuite été présentés pour faciliter l'évaluation des tolérances. À l'inverse, ces tableaux peuvent aussi servir à prédire le taux de non-conformité en fonction d'une tolérance préétablie et par rapport à la capacité d'un procédé connu. Les formules et les tableaux adimensionnels permettent une utilisation industrielle simple autant pour les concepteurs que les techniciens responsables des méthodes et du contrôle des procédés.

Annexe I : Développement mathématique pour P_{relative}

Le théorème des statistiques d'ordre implique que dans le cas de n variables aléatoires x_i (f est la fonction

densité PDF de x_i), la fonction de densité PDF de la variable d'ordre y_k de rang k (*Rank*) sera donnée par :

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(y_k)]^{k-1} [1 - F(y_k)]^{n-k} f(y_k) \tag{A.1}$$

Nous rappelons que le théorème des statistiques d'ordre fait correspondre les variables aléatoires $x_i \in \mathbb{R}$ d'un échantillon composé de n éléments, à un vecteur $x_{(i)} = [x_{(1)} \dots, x_{(n)}]$ où les $x_{(i)}$ sont en ordre croissant où $x_{(1)}$ est la plus petite valeur de l'échantillon et $x_{(n)}$ la plus grande.

Comme nous avons mentionné précédemment, dans le cas de la tolérance relative, la fonction de densité $f(r_i)$ d'un seul élément cylindrique suit une distribution *Rayleigh* (Éqs. (8) et (9)). Dans le cas étudié, nous sommes intéressés par la distribution du rang n , c'est-à-dire y_n . La substitution de $k = n$ dans l'équation précédente nous donne la fonction de densité de la variable y_n .

$$g_n(y_n) = n [F(y_k)]^{n-1} f(y_k) \tag{A.2}$$

La substitution des équations (8) et (9) dans l'équation (A.2) permet d'aboutir à l'expression analytique pour la fonction de densité et la fonction de répartition de $r_{P_relative}$. Ces dernières sont désignées par $g(r;(\sigma, n))$ (Éq. (11)) et $G(r;(\sigma, n))$ (Éq. (12)) respectivement.

Cette distribution est fonction de l'écart type (σ) et du nombre d'éléments (n). L'espérance (moyenne) de la fonction $g(r; (1, n))$ est très difficile à obtenir d'une manière explicite. Néanmoins, son expression analytique est :

$$E\{r_{FRTZF}\} = n \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)^{n-1} dx \tag{A.3}$$

L'intégrale précédente s'obtient de façon numérique seulement. Il en est de même pour la variance $Var\{r_{P_relative}\}$ qui ne peut être obtenue analytiquement pour un n arbitraire.

Annexe II : Développement mathématique pour $P_absolue$

Dans ce cas, les fonctions de densité PDF et de répartition CDF de la variable aléatoire R_i sont $k(R_i;(\sigma, \mu_x, \mu_y))$ et $K(R_i;(\sigma, \mu_x, \mu_y))$ respectivement. La variable R_i est calculée par rapport au centre théorique du i ème élément selon l'équation (4) et elle est donnée par [23] pour $R_i \geq 0, \sigma > 0, \mu_i \geq 0$:

$$k(R_i;(\sigma, \mu_x, \mu_y)) = \frac{R_i}{\sigma^2} I_0\left(\frac{R_i \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{R_i^2 + \mu_x^2 + \mu_y^2}{2\sigma^2}} \tag{A.4}$$

$$K(R_i;(\sigma, \mu_x, \mu_y)) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^R w I_0\left(\frac{w \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}}{\sigma^2}\right) \times e^{-\frac{w^2 + \mu_x^2 + \mu_y^2}{2\sigma^2}} dw \tag{A.5}$$

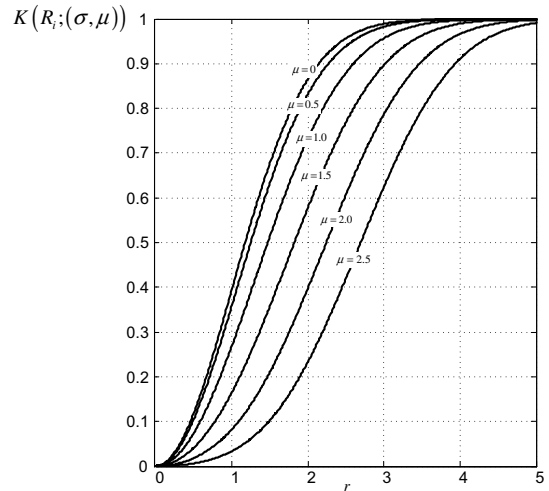
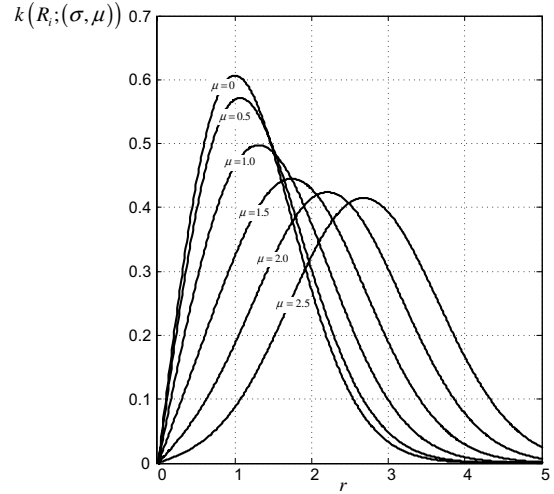


Fig. 6. Fonctions de densité $k(R_i; (1, n))$ et de répartition $K(R_i; (1, n))$ de la tolérance absolue pour la tolérance d'un seul élément ($n = 1$).

Avec $I_0(z)$ la fonction modifiée de *Bessel* d'ordre 0. La fonction de répartition $K(R_i;(\sigma, \mu))$ ne peut être obtenue sous forme explicite analytiquement. Elle sera évaluée numériquement pour différentes valeurs de $R_i \geq 0, \sigma > 0, \mu_i \geq 0$. La figure 6 illustre les fonctions $k(R_i;(\sigma, \mu))$ et $K(R_i;(\sigma, \mu))$ avec $\mu = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2}$ comme déviation radiale systématique.

La distribution de $r_{P_absolue}$ peut être obtenue à partir du théorème des statistiques d'ordre. Il s'agit de trouver la valeur maximale d'un ensemble des variables aléatoires R_i (voir Éq. (3)).

$$h_n(y_n) = n [K(y_k)]^{n-1} k(y_k) \tag{A.6}$$

La substitution des équations (A.4) et (A.5) dans l'équation (A.6) permet d'aboutir à l'expression analytique pour les fonctions de densité PDF et de répartition CDF de $r_{P_absolue}$. Ces dernières sont désignées respectivement par $h(r;(\sigma, \mu, n))$ et $H(r;(\sigma, \mu, n))$.

Références

- [1] ISO 8015, ISO 1101, ISO 5458, ISO 5459, ISO 1660, ISO 2768, ISO 10578, ISO 10579, Tolérances géométriques, International Standard Organisation
- [2] ASME Y14.5-2009, Geometric and Dimensioning Tolerancing, ASME Press, 2009
- [3] ISO 21747, Statistical methods, Process performance and capability statistics for measured quality characteristics, International Standard Organisation, 2006, p. 42
- [4] A.M. Polansky, A smooth nonparametric approach to multivariate process capability, *Technometrics* 43 (2001) 199–211
- [5] M.K. Nejad, F. Vignat, F. Villeneuve, 3D Simulation of Manufacturing Defects for Tolerance Analysis, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 45 (2009) 631–648
- [6] A. Desrochers, W. Ghie, L. Laperriere, Statistical tolerance analysis using the unified Jacobian-Torsor model, *Int. J. Prod. Res.* 48 (2010) 4609–4630
- [7] D.M. Hawkins, Multivariate quality control based on regression adjusted variables, *Technometrics* 33 (1991) 61–75
- [8] A.M. Polansky, A general framework for constructing control charts, *Qual. Reliab. Eng. Int.* 21 (2005) 633–653
- [9] H. Chen, A multivariate process capability index over a rectangular solid zone, *Stat. Sinica* 4 (1994) 749–758
- [10] E.J. Foster, R.R. Barton, N. Gautam, L.T. Truss, J.D. Tew, The process-oriented multivariate capability index, *Int. J. Prod. Res.* 43 (2005) 2135–2148
- [11] W. Taam, P. Subbaiah, J.W. Liddy, A note on multivariate capability indices, *J. Appl. Stat.* 20 (1993) 339–351
- [12] F.K. Wang, N.F. Hubele, F.P. Lawrence, J.D. Miskulin, H. Shahriari, Comparison of three multivariate process capability indices, *J. Quality Technol.* 32 (2000) 263–275
- [13] K. Mannar, D. Ceglarek, Functional capability space and optimum process adjustments for manufacturing processes with in-specs failure, *IIE Transactions* 42 (2010) 95–106
- [14] P.F. Jackson, Simple Process Capability ? *J. Quality Eng.* 40 (2001) 34–38
- [15] F.K. Wang, N.F. Hubele, Quality evaluation of geometric tolerance regions in form and location, *J. Quality Eng.* 14 (2002) 205–211
- [16] G. Knowles, G. March, J. Anthony, Evaluation process capability for geometrically toleranced parts: A practical approach, *J. Quality Eng.* 14 (2002) 365–374
- [17] H.C. Zhang, *Advanced Tolerancing Techniques*, Wiley Interscience, John Wiley & Sons, New York, 1997
- [18] M. Dowling, P. Griffin, K. Tsui, C. Zhou, Statistical issues in geometric feature inspection using coordinate measuring machines, *Technometrics* 39 (1997) 3–17
- [19] D.R. Bothe, Assessing capability for hole location, *J. Quality Eng.* 18 (2006) 325–331
- [20] M. Xi, E.A. Lehtihet, T.M. Cavalier, Numerical approximation approach to the producibility of composite position tolerance specifications for pattern of holes, *Int. J. Prod. Res.* 42 (2004) 243–266
- [21] M.D. Phillips, B. Cho, Quality improvements for process with circular and spherical specification regions, *J. Quality Eng.* 11 (1999) 235–243
- [22] A. Shan, R.N. Roth, R.J. Wilson, A new approach to statistical geometrical tolerance analysis, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 15 (1999) 222–230
- [23] A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic process*, 3rd Edition, McGraw Hill, 1991
- [24] N.D. Cox, S.S. Shapiro, *Statistical Model in Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1967
- [25] M.J. Harry, *Six Sigma Mechanical Design Tolerancing*, Publication No. 6s-2-10/88, Motorola Inc., 1988, p. 242
- [26] ASME B5.54, *Methods for Performance Evaluation of Computer Numerically Controlled Machining Centers*, ASME Press, 1992
- [27] S. Tichadou, et al., 3-D manufacturing dispersions: two experimental applications, 10th CIRP International Conference on Computer Aided Tolerancing, Erlangen, Germany, 2007